

Reeksen van getallen

Oefening 6.1 (v)

Een eerste tutorial over het toepassen van convergentie-testen

Nico Scheerlinck & Elien Sijmkens
Departement Computerwetenschappen
Leuven, 2020

Challenge

Oefening 6.1 (v). Is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}$ convergent of divergent?

In deze tutorial gaan we alle convergentie-testen die je in de cursus hebt gezien (dat zijn er 10) eens toepassen om na te gaan of de gegeven reeks van getallen convergeert of divergeert.

In de praktijk is het meestal voldoende om slechts 1 of 2 testen uit te voeren. De vraag die zich dan stelt is *welke testen we best gebruiken?* Op deze vraag is er geen uniek of eenduidig antwoord. Met andere woorden, een algemeen recept of stappenplan is niet voorhanden.

Vandaar dat het belangrijk is om tijdens jouw studie van reeksen van getallen alle testen eens uit te proberen. Alleen op die manier verkrijg je inzicht in de verschillende convergentie-testen en hoe je deze concreet kan/moet toepassen. Deze aanpak loont alvast de moeite, want gaande weg ontdek je een eigen stappenplan en/of strategie om convergentie van reeksen te onderzoeken.

Noot: In deze tutorial gaan wij er vanuit dat je de verschillende convergentie-testen, die in de cursus afgeleid en besproken worden, reeds grondig bestudeerd hebt.

Vorbereidend werk.

We gaan eerst na of de gegeven reeks in een eenvoudigere vorm kan neergeschreven worden.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \text{ met } u_n = \left(\frac{2}{n}\right)^n.$$

Het volstaat dus om aan te tonen dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n$ convergeert of divergeert.

Daarna passen we het concept *asymptotische equivalentie van rijen* toe om te onderzoeken of het gedrag naar oneindig van de termenrij $\{u_n\}$ kan beschreven worden door een eenvoudigere termenrij $\{a_n\}$, met $u_n \sim a_n$, $n \rightarrow \infty$.

Voor de gegeven reeks is het niet mogelijk om de termen u_n te vereenvoudigen als $n \rightarrow \infty$.

MuPaD bevestigt ook deze vaststelling (via het commando *series*):

```
[u:=n->(2/n)^n
[series(u(n),n=infinity)

      2^n
      n^n + O(2^n/n^5)
```

1. Nodige voorwaarde voor convergentie van een reeks

De reeks $\sum u_n$ is mogelijk convergent als $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Deze voorwaarde is nodig, maar niet voldoende.

In principe controleer je altijd eerst de nodige voorwaarde voor convergentie!

Als blijkt dat $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ dan zal de reeks $\sum u_n$ sowieso divergeren.

In het geval dat aan de nodige voorwaarde voldaan is, kunnen we nog geen uitspraak doen over de convergentie of divergentie van een reeks. We moeten de reeks dan verder onderzoeken en andere testen toepassen.

We gaan na of de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n$ voldoet aan de nodige voorwaarde:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln\left(\frac{2}{n}\right)} = e^{-\infty} = 0.$$

MuPaD bevestigt deze berekening.

```
[ u:=n->(2/n)^n
[ limit (u(n),n=infinity)
0
```

De nodige voorwaarde is voldaan. We moeten dus verder testen.

Noot: Op de volgende bladzijden volgt een overzicht van de verschillende convergentie-testen die in de cursus afgeleid en besproken worden, maar nu toegepast op de gegeven reeks.

We voorzien 1 bladzijde per test. De volgorde van de testen die we toepassen, is dezelfde als de volgorde waarin de testen in de cursus voorkomen.

Op het einde (pagina 11) volgen enkele conclusies.

2. Vergelijkingstest

Deze test is enkel geldig voor reeksen met positieve termen.

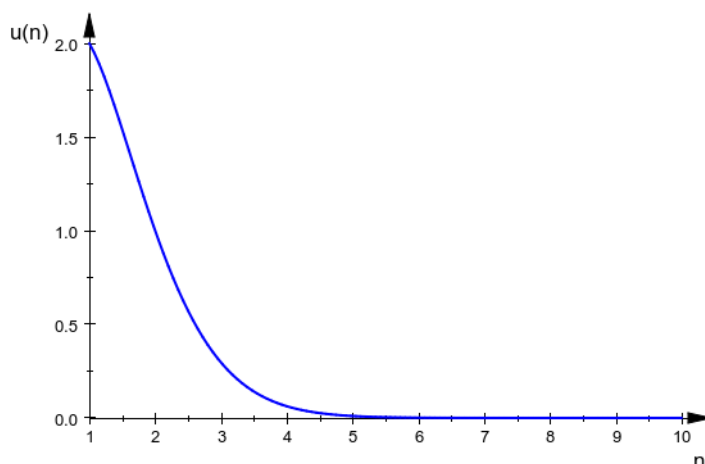
In de vergelijkingstest gaan we voor een gegeven reeks opzoek naar een *convergerende majorante* of een *divergerende minorante*.

Tijdens deze zoektocht is het aan te raden om een gegeven reeks te vergelijken met (enkele) *referentiereeksen* waarvan de convergentie of divergentie gekend is. Indien je een eenvoudige *asymptotisch equivalente termenrij* kan vinden voor de gegeven termenrij $\{u_n\}$, dan wordt de zoektocht alvast aangenamer.

Laat ons eerst eens kijken naar het verloop van de termen $u_n = \left(\frac{2}{n}\right)^n$:

```
[ u:=n->(2/n) ^ n
[ plot ( u(n) , n=1..10)
```

Uit het verloop van u_n kunnen we afleiden dat er vermoedelijk een termenrij $\{v_n\} = \{q^n\}$ te vinden is, met $0 < q < 1$, waarvoor geldt dat vanaf een bepaalde waarde voor n (bijvoorbeeld $n = k$) de termen u_n steeds kleiner zijn dan de termen q^n .



Als we zo'n termenrij $\{v_n\} = \{q^n\}$ vinden, dan geldt voor $n \geq k$ dat $0 \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n \leq q^n$, en dus dat

$$0 \leq \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n \leq \sum_{n=k}^{\infty} q^n,$$

met $\sum_{n=k}^{\infty} q^n$ een meetkundige reeks (hier startend bij $n = k$) die convergent is als $|q| < 1$ is.

Daaruit volgt dan dat de reeks $\sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n$ ook convergent is!

We gaan nu opzoek naar een geschikte waarde voor q .

We weten bijvoorbeeld dat $0 < 2 \leq \frac{n}{2}$ als $n \geq k = 4$. Daaruit volgt dan dat $0 < \frac{2}{n} \leq \frac{1}{2}$, en dus ook dat $0 < \left(\frac{2}{n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Als we $q = \frac{1}{2}$ kiezen, dan is bovenstaande vergelijkingstest

geldig. We weten dan ook dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n$ convergeert, want

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n = \sum_{n=1}^3 \left(\frac{2}{n}\right)^n + \sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n = 2 + 1 + \frac{8}{27} + \sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n.$$

Merk op dat je ook een andere basisvergelijking als vertrekpunt kan nemen, bijvoorbeeld: $0 < 3 \leq \frac{n}{2}$ met $n \geq k = 6$. Als je dan $q = \frac{1}{3}$ kiest (en $k = 6$) kom je via bovenstaande vergelijking/redenering tot dezelfde conclusie ...

3. Integraaltest

Deze test is enkel geldig voor reeksen met positieve termen.

In de integraaltest beschouwen we een *dalende* functie $f(x) \geq 0$ op $[k, \infty)$, met $k \in \mathbb{N}$, zodat $u_n = f(n)$, $n \geq k$.

De reeks $\sum_{n=k}^{\infty} u_n$ zal dan convergeren als en slechts als de oneigenlijke integraal $\int_k^{\infty} f(x) dx$ convergeert.

Als aan de voorwaarden voor deze test voldaan is, dan kunnen we beroep doen op de convergentietesten voor oneigenlijke integralen (zie Analyse, deel I).

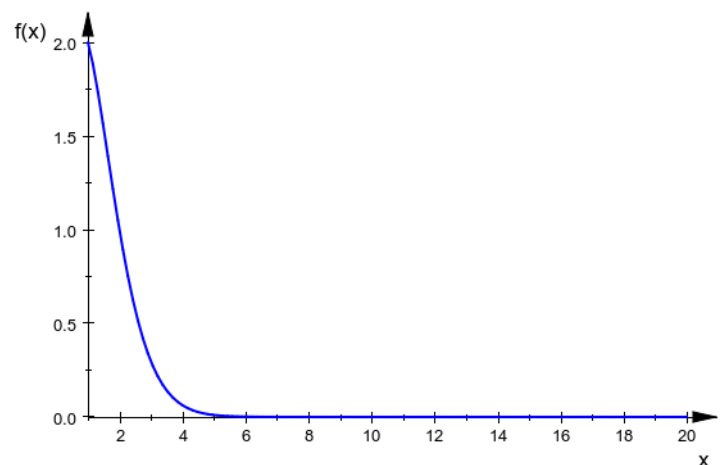
Voor de gegeven reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ beschouwen we dus de functie $f(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^x$ op $[1, \infty]$. De voorwaarde $f(x) \geq 0$ is alvast voldaan. We gaan na of ook aan de andere voorwaarde van de integraaltest voldaan is:

```
[ f:=(2/x)^x
[ plot ( f , x=1..20)
```

Op het eerste zicht blijkt dat $f(x)$ dalend is op $[1, \infty)$. We controleren of dit vermoeden juist is:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2}{x}\right)^x \left(\ln\left(\frac{2}{x}\right) - 1\right) \\ &= \left(\frac{2}{x}\right)^x (\ln 2 - \ln x - 1) \end{aligned}$$

Uit $2 < e$ volgt dat $\ln 2 - 1 < 0$, en dus is $f'(x) < 0$ op $[1, \infty]$. Daaruit volgt dat de functie $f(x)$ inderdaad dalend is op $[1, \infty]$.



Vervolgens onderzoeken we of de oneigenlijke integraal $\int_1^{\infty} f(x) dx$ convergeert of niet.

Deze oneigenlijke integraal kunnen we niet vergelijken met een referentie-integraal $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$, omdat voor de integrand niet meteen een eenvoudige functie $g(x) = \frac{1}{x^p}$ te vinden is zodat $f(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow \infty$. Ga zelf na waarom dat zo is.

Laat ons dan de veralgemeende p-test eens toepassen met $p = 2 > 1$:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} x^p f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^2 \left(\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{n \rightarrow \infty} x^2 e^{x \ln\left(\frac{2}{x}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x \ln\left(\frac{x}{2}\right)}} = 0.$$

Bovenstaande limiet L is dus eindig voor $p = 2 > 1$. Bijgevolg is de oneigenlijke integraal

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{2}{x}\right)^x dx \text{ convergent, en dus convergeert ook de reeks } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n.$$

We hebben hier $p = 2 > 1$ gekozen om de limiet uit te rekenen. Merk op dat we even goed $p = 3$ konden kiezen, omdat in deze oefening de bovenstaande limiet voor elke $p > 1$ eindig is.

4. Eigenschap asymptotisch equivalente rijen

Deze eigenschap is enkel geldig voor reeksen met positieve termen.

Stel dat er getallen c en p bestaan zodat de termen van de reeks $\sum u_n$ voldoen aan

$$u_n \sim \frac{c}{n^p}, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{of} \quad u_n \sim \frac{c}{n^p \ln n}, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{of} \quad u_n \sim \frac{c}{n(\ln n)^p}, \quad n \rightarrow \infty$$

dan convergeert de reeks $\sum u_n$ als en slechts als $p > 1$.

Deze eigenschap kunnen we niet toepassen voor de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n$, omdat we niet meteen een eenvoudige termenrij kunnen vinden voor $\{u_n\}$ waarvan de termen voldoen aan één van bovenstaande equivalenties. Zie ook *voorbereidend werk* op pagina 1.

5. Verhoudingstest: criterium van d'Alembert

Deze test is enkel geldig voor reeksen met positieve termen.

Als we voor de reeks met positieve termen $\sum u_n$ een $s \in (0, 1)$ en een index N kunnen vinden zodat $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq s$, $\forall n \geq N$ dan convergeert de reeks $\sum u_n$.

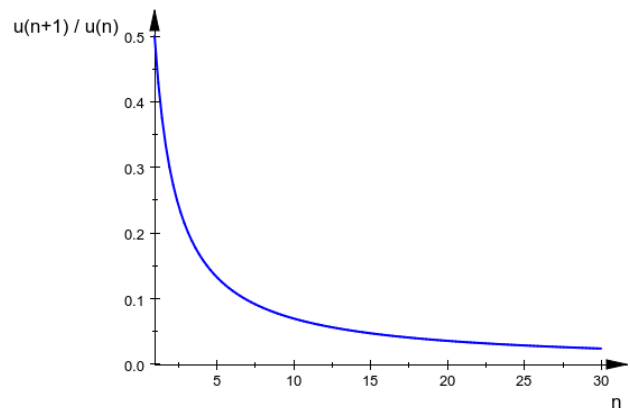
Als echter $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, $\forall n \geq N$ dan divergeert de reeks $\sum u_n$.

Tijdens deze zoektocht is het aan te raden om zich een beeld te vormen van de rij $\left\{ \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\}$. Indien je voor deze rij van verhoudingen een eenvoudige *asymptotisch equivalente rij* kan vinden, dan wordt de zoektocht alvast aangenaamer.

Laat ons voor de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} \right)^n$ eerst eens het verloop bekijken van de verhouding $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$:

```
[u:=n->(2/n)^n
[v:=u(n+1)/u(n)
[plot(v,n=1..30)
```

Uit het verloop van $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ kunnen we afleiden dat er vermoedelijk een $s \in (0, 1)$ te vinden is zodat $\forall n$, $v_n \leq s$. Hieronder onderzoeken we dit vermoeden.



$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{2}{n+1} \right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{n} \right)^n} = \left(\frac{2^{n+1}}{2^n} \right) \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = \frac{2}{n} \left(\frac{n+1-1}{n+1} \right)^{n+1} = \frac{2}{n} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}.$$

Als we nu de limietdefinitie van e^x toepassen, dan weten we dat $\left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ een stijgende rij is met limiet e^{-1} .

Uit bovenstaande berekening volgt dan dat $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{2e^{-1}}{n}$, $n \rightarrow \infty$.

MuPaD bevestigt deze berekening/vaststelling (via het commando *series*):

```
[series(v,n=infinity,4)
2e^-1/n - e^-1/n^2 + 7e^-1/12n^3 - 3e^-1/8n^4 + O(1/n^5)
```

Er geldt dus $\forall n \in \mathbb{N}$ dat $0 < v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{n} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \leq \frac{2e^{-1}}{n}$.

We weten ook dat $\forall n \in \mathbb{N}$ geldt dat $0 < \frac{1}{n} \leq 1$. Uit deze ongelijkheden volgt dan dat

$$0 < v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{2e^{-1}}{n} \leq 2e^{-1} = \frac{2}{e} < 1.$$

We hebben nu een $s = 2e^{-1}$ gevonden in $(0, 1)$ zodat $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq s$, $\forall n \geq N = 1$. En dus, convergeert de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} \right)^n$.

6. Eerste limietvorm van de verhoudingstest

Deze test is enkel geldig voor reeksen met positieve termen.

Veronderstel dat

$$m = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \text{en} \quad M = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

- Als $M < 1$ dan convergeert de reeks $\sum u_n$.
- Als $m > 1$ dan divergeert de reeks $\sum u_n$.
- Als $m \leq 1 \leq M$, dan kan in het algemeen geen besluit getrokken worden, behalve als vanaf een bepaalde index n geldt dat $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, want dan divergeert $\sum u_n$.

In deze test komt het er dus op neer om de bovenlimiet M en/of onderlimiet m te berekenen/bepalen.

Als je voor de rij $\left\{ \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\}$ een eenvoudige *asymptotisch equivalente rij* kan vinden, dan wordt de berekening/bepaling alvast iets eenvoudiger (zie ook de volgende test).

Hier maken we gebruik van een resultaat uit de vorige test (criterium van d'Alembert).

Daar hebben we voor de termen $u_n = \left(\frac{2}{n}\right)^n$ aangetoond/berekend dat

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{2e^{-1}}{n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Dit resultaat werd ook door MuPaD bevestigd:

```
[u:=n->(2/n)^n
[v:=u(n+1)/u(n)
[series(v,n=infinity,4)
2e^-1/n - e^-1/n^2 + 7e^-1/12n^3 - 3e^-1/8n^4 + O(1/n^5)
```

Dit resultaat kunnen we nu gebruiken om de limiet μ te berekenen van de rij $\{v_n\} = \left\{ \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\}$:

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2e^{-1}}{n} = 0.$$

De limiet van $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ bestaat, en is dus gelijk aan de bovenlimiet M en de onderlimiet m .

Daaruit volgt $M = \mu = 0 < 1$.

De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n$ is dus convergent, want $M < 1$.

7. Tweede limietvorm van de verhoudingstest

Deze test is enkel geldig voor reeksen met positieve termen.

Als $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ bestaat, dan volgt uit

- $\mu < 1$ de convergentie van de reeks $\sum u_n$.
- $\mu > 1$ de divergentie van de reeks $\sum u_n$.

Als $\mu = 1$, dan kan in het algemeen geen besluit getrokken worden, behalve als vanaf een bepaalde index n geldt dat $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, want dan divergeert $\sum u_n$.

In deze test komt het er dus op neer om na te gaan of de limiet van $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ bestaat, en in het geval van bestaan deze dan te berekenen.

Als je voor de rij $\left\{ \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\}$ een eenvoudige *asymptotisch equivalente rij* kan vinden, dan wordt de bepaling/berekening alvast iets eenvoudiger.

Hier maken we opnieuw gebruik van het resultaat dat we vonden bij de verhoudingstest (criterium van d'Alembert):

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{2e^{-1}}{n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

De limiet $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ bestaat en we kunnen deze via bovenstaand resultaat berekenen:

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2e^{-1}}{n} = 0 < 1.$$

Deze berekening wordt ook door MuPaD bevestigd:

```
[u:=n->(2/n)^n
[v:=u(n+1)/u(n)
[mu = limit(v,n=infinity)
0
```

De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n$ is dus convergent, want $\mu < 1$.

8. Klein criterium van Cauchy

Deze test is enkel geldig voor reeksen met positieve termen.

Stel $\Lambda = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$.

- Als $\Lambda < 1$ dan convergeert de reeks $\sum u_n$.
- Als $\Lambda > 1$ dan divergeert de reeks $\sum u_n$.
- Als $\Lambda = 1$, dan kan geen uitspraak worden gedaan, behalve in het geval dat voor een oneindig aantal termen geldt $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, want dan divergeert $\sum u_n$.

In deze test komt het er dus op neer om de bovenlimiet Λ te bepalen/berekenen.

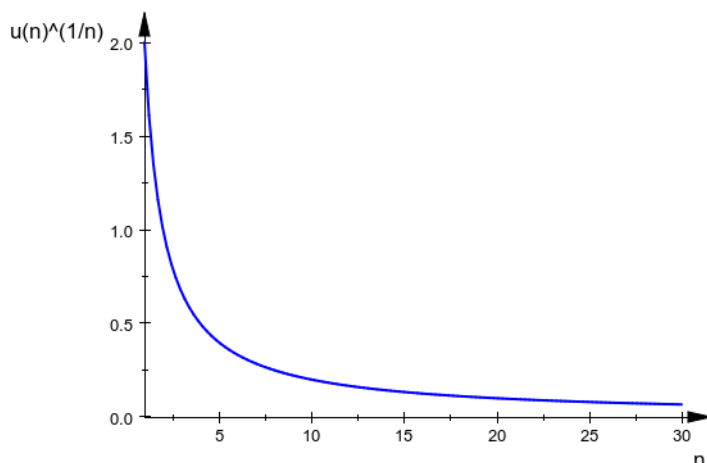
Als je voor de rij $\{\sqrt[n]{u_n}\}$ een eenvoudige *asymptotisch equivalente rij* kan vinden, dan wordt de bepaling/berekening alvast iets eenvoudiger.

Laat ons voor de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n$ eerst eens het verloop bekijken van $w_n = \sqrt[n]{u_n}$:

```
[u:=n->(2/n) ^ n
[w:=u(n) ^ (1/n)
[plot(w, n=1..30)
```

Uit het verloop van $w_n = \sqrt[n]{u_n}$ kunnen we afleiden dat deze termen convergeren naar een limietwaarde die kleiner is dan 1, en dus ook $\Lambda < 1$.

Hieronder onderzoeken we dit vermoeden.



$$w_n = \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{2}{n}\right)^n} = \frac{2}{n}.$$

Daaruit volgt dat de rij $\{w_n\}$ een limiet L heeft:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0.$$

Bijgevolg is de bovenlimiet $\Lambda = L = 0 < 1$.

De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n$ is dus convergent, want $\Lambda < 1$.

9. Test van Raabe

Deze test is enkel geldig voor reeksen met positieve termen.

Als er een constante c bestaat zodanig dat

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim 1 - \frac{c}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

dan convergeert de reeks $\sum u_n$ als $c > 1$, en divergeert de reeks $\sum u_n$ als $c < 1$.

Als $c = 1$ dan kan er geen uitspraak gedaan worden over convergentie of divergentie van de reeks $\sum u_n$.

In deze test komt het er dus op neer om bovenstaande asymptotische equivalentie te controleren, en als deze geldig is de constante c te bepalen.

We maken opnieuw gebruik van een berekening die we bij het toepassen van de verhoudingstest (criterium van d'Alembert) gemaakt hebben.

Daar vonden we nl. voor $u_n = \left(\frac{2}{n}\right)^n$ de volgende asymptotische equivalentie:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{2e^{-1}}{n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Dit resultaat werd ook door MuPaD bevestigd:

```
[u:=n->(2/n)^n
[v:=u(n+1)/u(n)
[series(v,n=infinity,4)
  \frac{2e^{-1}}{n} - \frac{e^{-1}}{n^2} + \frac{7e^{-1}}{12n^3} - \frac{3e^{-1}}{8n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)
```

Deze asymptotische equivalentie is alvast niet geldig om de test van Raabe te kunnen uitvoeren, want daarvoor moet minstens gelden dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, en dat is hier al zeker niet het geval.

Voor de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n$ kunnen we de test van Raabe dus niet toepassen.

Merk dus op dat de test van Raabe wel in aanmerking komt (en zeer handig kan zijn) voor het geval dat de tweede limietvorm van de verhoudingstest geen uitspraak oplevert.

10. Leibnizreeks test

Deze test kan enkel gebruikt worden voor *alternerende* reeksen of *wisselreeksen*. Dat zijn reeksen waarvan de termen afwisselend positieve en negatieve getallen zijn.

Een Leibnizreeks is een wisselreeks van de vorm $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$, met $\{u_n\}$ een dalende rij ($u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots \geq 0$) en $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Stelling: Een Leibnizreeks is convergent.

In deze test komt het er dus op neer om voor een wisselreeks na te gaan of de rij $\{ |(-1)^n u_n| \}$ dalend is EN $\lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n u_n| = 0$. Als dat zo is, dan is de wisselreeks convergent.

Voor de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n$ is deze test niet van toepassing, want het is geen wisselreeks.

Conclusies

1. De nodige voorwaarde voor convergentie wordt best altijd gecontroleerd. Indien deze niet voldaan is, dan is de reeks automatisch divergent.

Noot: dat geldt algemeen, dus ook voor wisselreeksen!

2. Voor een reeks $\sum u_n$ loont het de moeite om eigenschappen van asymptotisch equivalente rijen te gebruiken of uit te proberen, zowel voor u_n , $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en $\sqrt[n]{u_n}$.

3. Enkele bevindingen/raadgevingen in het licht van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n$ die we in deze tutorial uitgebreid onderzocht hebben:

- Het klein criterium van Cauchy vraagt het minste denk- en rekenwerk omdat de vorm van u_n zich daar goed toe leent (wat niet altijd het geval is).
- De vergelijkingstest en de integraaltest vragen meestal enig denk- en rekenwerk, tenzij de termenrij (of integrand) via eigenschappen van asymptotisch equivalente rijen (of functies) sterk vereenvoudigd kan worden. In het beste geval kunnen we dan de gegeven reeks (of bijhorende oneigenlijke integraal) vergelijken met een referentiereeks (of referentie-integraal) waarvan de convergentie/divergentie gekend is.
- Indien de tweede limietvorm van de verhoudingstest kan toegepast worden, dan vraagt deze test enkel rekenwerk, nl. het berekenen van een limiet. Indien deze test geen uitspraak oplevert, dan kan de test van Raabe enig soelaas bieden.
- Indien de verhoudingstest (en haar limietvormen), de integraaltest, het klein Criterium van Cauchy of de test van Raabe geen uitweg bieden (niet toepasbaar of geen uitspraak mogelijk), dan moet men zich sowieso wenden tot de vergelijkingstest en opzoek gaan naar een convergerende majorante of een divergerende minorante ...