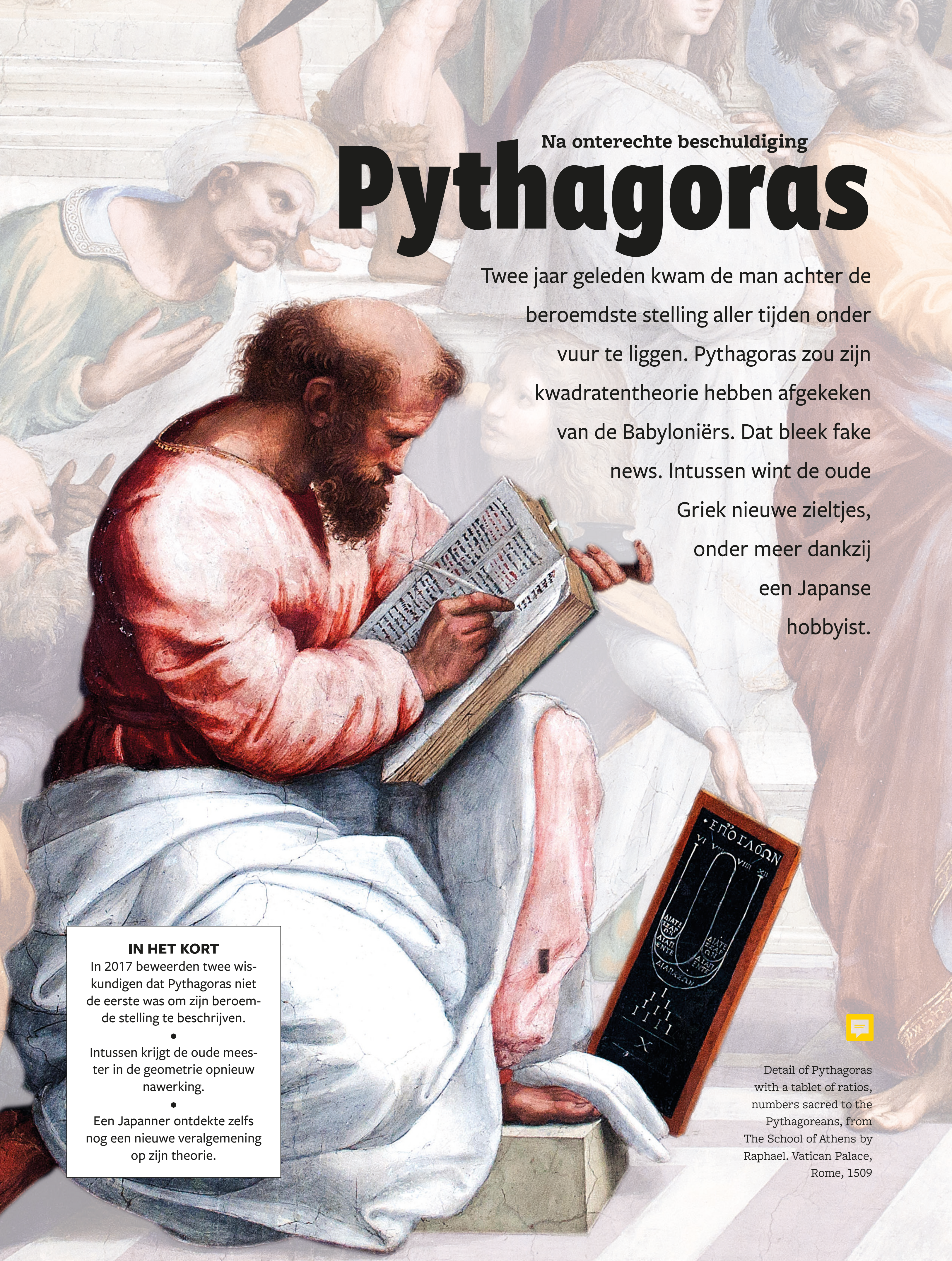
Na onterechte beschuldiging

Pythagoras

Twee jaar geleden kwam de man achter de beroemdste stelling aller tijden onder vuur te liggen. Pythagoras zou zijn kwadratentheorie hebben afgekeken van de Babyloniërs. Dat bleek fake news. Intussen wint de oude Griek nieuwe zieltjes, onder meer dankzij een Japanse hobbyist.



Detail of Pythagoras with a tablet of ratios, numbers sacred to the Pythagoreans, from The School of Athens by Raphael. Vatican Palace, Rome, 1509

IN HET KORT

In 2017 beweerden twee wiskundigen dat Pythagoras niet de eerste was om zijn beroemde stelling te beschrijven.

•

Intussen krijgt de oude meester in de geometrie opnieuw nawerking.

•

Een Japanner ontdekte zelfs nog een nieuwe veralgemening op zijn theorie.

IS BACK

Hoge bomen vangen veel wind, ook als ze al lang dood zijn. Doorheen de eeuwen kreeg de figuur van Pythagoras (ca. 570 v.Chr. – ca. 495 v.Chr.) allerlei bagger over zich heen. Sommigen beweerden dat hij nooit heeft geleefd, anderen zouden hem de pinakel van zijn werk – de stelling van Pythagoras – ontnemen. Volgens hen was het een wiskundige uit het Midden-Oosten die de stelling heeft bedacht.

In 2017 stuurden de wiskundigen Daniel Mansfield en Norman Wildberger van de Australische University of New South Wales een sappig persbericht de wereld in. Daarin maakten ze melding van een 3.700 jaar oude kleitablet uit het hedendaagse Zuid-Irak. Op de zogeheten Plimpton 322-tablet staat een reeks getallen waaruit je getallen kan afleiden waarvan de som van de kwadraten het kwadraat van een derde getal geeft – precies wat Pythagoras eeuwen later zou zeggen.

De media sprongen op het verhaal van Mansfield en Wildberger, en het onderliggende narratief was duidelijk: de Grieken moesten door het stof. Eerst hadden ze het Europese budget in gevaar gebracht met hun overheidsschulden, en nu bleken ze ook nog eens een stelling te hebben gestolen van de toch al onderschatte Arabieren. Overal ging het artikel vergezeld van eenzelfde foto: die van een parmantige Mansfield met het bewuste tabletje op de voorgrond, geprangd tussen zijn witte handschoentjes. Het geheel ging erin als zoete koek, bij wiskundigen én het grote publiek.

Toch kon je destijds als wiskundehistoricus enkele pertinente bemerkingen aanstippen bij de 'vondst' van het Australische duo. De tablet werd bijvoorbeeld al in 1921 ontdekt, en de wiskundige betekenis van de getalreeks is al bekend sinds een studie uit 1945 – later zouden er nog studies over volgen. Problematischer is dat nergens op de tablet een formule staat in de aard van Pythagoras' bekende a2 + b2 = c2. Er staat ook geen driehoek op. Het enige dat je erop vindt, is een reeks getallen, en soms kloppen ze niet eens.

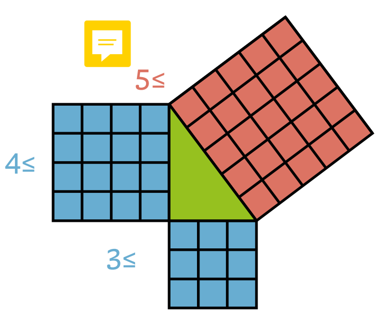
De tablet levert dus geen bewijs voor de superieure wiskundebeheersing van de Babyloniërs uit Zuid-Irak, zoals Mansfield en Wildberger graag lieten geloven. Dat volk kende het begrip 'hoek' niet, dus van driehoeksmeetkunde kan je bezwaarlijk spreken. Ook van rationale getallen – breuken met gehele getallen – hadden ze daar geen kaas gegeten. Laat staan dat ze een decimale notatie zouden afronden na de decimaal. De Babyloniërs werkten dus wel 'exacter', hun werk 'betere wiskunde' noemen, is een stap te ver.

Er bestaan andere oude teksten met bewijzen voor enkele bijzondere gevallen van de stelling en met een driehoek erbij. Maar het was wel degelijk de oude Griek Pythagoras die als eerste de stelling aantoonde en dat

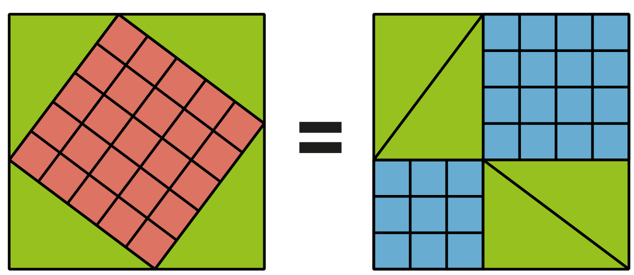
Dirk Huylebrouck doceert aan de KU Leuven en vertelt geïnspireerd over wiskunde.

DE STELLING VAN PYTHAGORAS

De stelling van Pythagoras stelt dat in een rechthoekige driehoek de som $a^2 + b^2$ van de kwadraten van de lengtes a en b van rechthoekszijden gelijk is aan het kwadraat van de lengte c van de schuine zijde: $a^2 + b^2 = c^2$.
Neem bijvoorbeeld de rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 3 en 4 en schuine zijde 5: $3^2 + 4^2 = 5^2$ want $9 + 16 = 25$. Dit voorbeeld illustreert de stelling met zeer eenvoudige getallen – 3, 4 en 5 – en de driehoek wordt daarom de Pythagoreïsche driehoek genoemd. Andere eenvoudige voorbeelden zijn de driehoeken met zijden 5, 12 en 13 of deze met zijden 7, 24 en 25.
Voor zijn stelling ging Pythagoras als volgt te werk. In twee vierkanten staan vier identieke driehoeken, die evenwel verschillend geschikt zijn. De overblijvende ruimtes (waarvan de ene een vierkant is met oppervlakte c^2 en de andere een som van twee vierkanten met oppervlaktes a^2 en b^2) moeten dus gelijk zijn, en daarom is c^2 gelijk aan a^2 plus b^2.



fotoonderschrift links



fotoonderschrift rechts

Het verschil tussen Pythagoras en de oude Babyloniërs is als wiskunde tegenover wat vrijblijvende spielerei met getallen

deed als volwaardige stelling, en niet met gewoon een aantal numerieke voorbeelden. Dat verschil niet erkennen, is absurd: het is wiskunde gelijkstellen aan wat vrijblijvende *spielerei* met getallen.

Euclides versus de Bijbel

Gelukkig waren er in het verleden voldoende geleerden die Pythagoras wel de eer lieten toekomen die hij verdiende. Zijn stelling kreeg grote roem omdat ze in *De Elementen* stond, een serie van dertien boeken geschreven door de Griek Euclides (ca. 300 v.Chr.), waarin hij een kleine vijfhonderd toen bekende stellingen en bewijzen logisch rangschikte. Door ze systematisch te benaderen, verhief Euclides deze wiskunde tot de grootste stimulans voor de ontwikkeling van de discipline.

Lange tijd wedijverden *De Elementen* met de Bijbel om de titel van bestseller van het jaar. Euclides bewees de stelling van Pythagoras wel op een andere manier, door te zeggen dat elk van de kleinere vierkanten gelijk is aan een rechthoekig deel van het grotere vierkant en de som van die twee rechthoekige delen precies het grote vierkant is. In de tweeduizend jaar die verstreken zijn sinds *De Elementen* verscheen, hebben wiskundigen Euclides' redenering in ontelbare tekeningen gevisualiseerd.

Velen probeerden ook die ene stelling in het boek – die van Pythagoras – op allerlei alternatieve manieren te bewijzen. De Amerikaan Elisha Scott Loomis verzamelde zowaar 370 bewijzen in zijn boek *The Pythagorean Proposition* uit 1928. Bij Technopolis staat een opstelling waarbij je water uit de twee kleine vierkanten kan laten stromen in het grote vierkant om zo hun gelijkheid te illustreren. Zelf verkies ik een bewijsje dat net zoals dat van Pythagoras met vier groene driehoekjes werkt en een eenvoudig algebraïsche uitwerking heeft: $c^2 = 4ab/2 + (a-b)^2 = 2ab + a^2 + b^2 - 2ab = a^2 + b^2$ (zie figuur).

Niet alleen kwamen er meer bewijzen, er volgden ook talrijke veralgemeningen. Als je op de zijden van de driehoek andere gelijkvormige figuren plaatst dan vierkanten, dan 'werkt de stelling ook', zo bleek. Gelijkvormige driehoeken, regelmatige vijfhoeken of gelijkvormige stukken cirkel, het doet er allemaal niet toe: de som van de oppervlakten van de figuren op de rechthoekszijden is gelijk aan de oppervlakte van de figuur op de schuine zijde. De reden daarvoor is dat de oppervlakte van een dergelijke figuur evenredig is met het kwadraat van een zijde. Of: de oppervlakte is gelijk aan het kwadraat van een zijde maal een vast getal.

Het is merkwaardig hoeveel culturen doorheen de tijden mogelijke veralgemeningen hebben bestudeerd. Er kwamen versies voor willekeurige driehoeken, met parallellogrammen in plaats van vierkanten, en 3D-versies met ruimtelijke interpretaties. En met de komst van de moderne wiskunde volgden abstracte versies waarin elke verwijzing naar een driehoek en naar kwadraten of vierkanten verdwenen is. Tot uiteindelijk, na tweeduizend jaar globaal zoeken en studeren, alles gezegd, berekend en beredeneerd was.

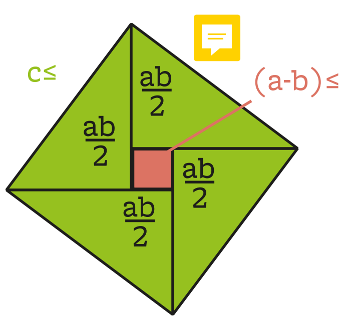
Revival

Inderdaad, vandaag zijn de Euclidische geometrische vraagstukken passé. Op enkele uitzonderingen na vind je nergens nog punten, lijnen, vlakken, cirkels of bollen met hun onderlinge relaties in het vlak en in de ruimte – niet in het onderwijs en zelfs niet in de hardcore-wiskunde. De benaming 'elementaire geometrie', die vanouds naar de titel van Euclides' werk verwees, krijgt vandaag soms de connotatie van 'simpel'.

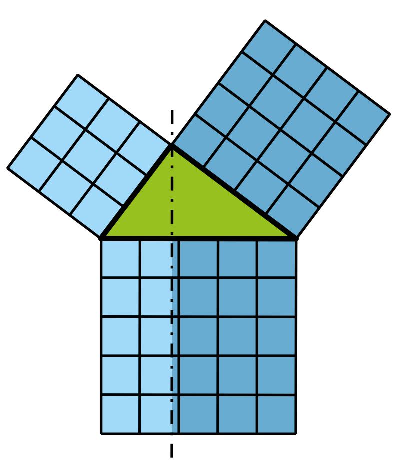
De stelling van Pythagoras is een van de zeldzame theses in het boek van Euclides die nog overeind zijn gebleven in de hedendaagse wiskunde. Al heeft ook Pythagoras moeten inbinden: vandaag bevat geen enkel tekstboek nog de afbeelding met driehoekjes die in een vierkant passen, tenzij dan als bladvulling.

Sommige wiskundigen vinden dat Pythagoras en zijn stelling aan een revival toe zijn. Eén van hen is de Oostenrijker Gunter Weiss (TU Dresden). In sommige van zijn publicaties en voordrachten stelt hij vraagstukken voor in Euclidische aard. Volgens hem kunnen de onderwerpen die Euclides destijds tackelde leerlingen en studenten ook vandaag nog helpen om hun logisch redeneren aan te scherpen. Bovendien ontwikkelden programmeurs software waarmee je aan Euclides' figuren beweging kan toekennen door de punten, rechten en cirkels te laten variëren, zodat zijn wiskunde een beetje tot leven komt.

De stelling van Pythagoras neemt een centrale positie in bij Weiss' moderniseringsinspanningen. Bij wijze van illustratie neemt hij er graag een Japanse hobbywiskundige bij. Hirotaka Ebisui verbond de hoekpunten van de

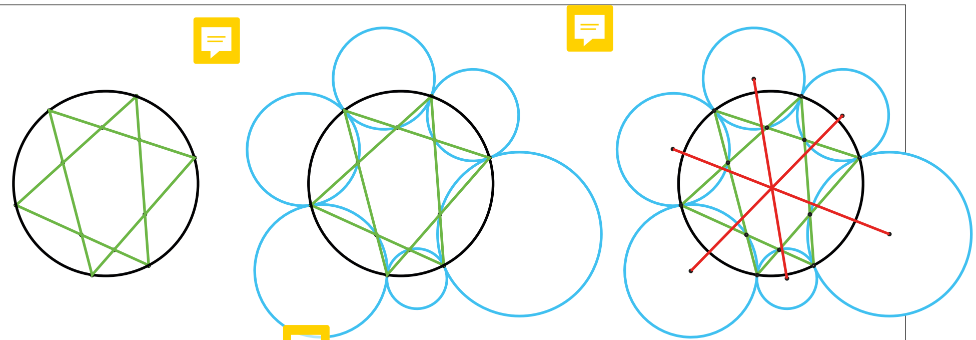


fotoo,dersjcerds



HIROTAKA EBISUI, HET ‘VREEMDE GENIE’

De Japanner Hirotaka Ebisui genoot geen brede wiskundige vorming, maar toch vond hij meer dan vierduizend ‘nieuwe stellingen’. Tijdens een conferentie in Osaka kwam hij in contact met de Oostenrijkse wiskundige Gunther Weiss. Deze laatste zag onmiddellijk het belang ervan in, al is de communicatie met de Japanse zonderling moeilijk, want hij spreekt nauwelijks Engels en staat alleen in de Japanse wiskundige gemeenschap. Weiss onderzoekt de stellingen van de man die hij een *‘strange genius’* noemt, en werkt aan de verspreiding ervan. Hier~~onder~~ staat een voorbeeld van Ebisui’s ‘stelling van de zes cirkels’. Weiss twijfelt nog of de Japanner niet gewoon de zogenaamde stelling van Miquel heeft herontdekt, dan wel een andere soort stelling heeft bedacht. In elk geval illustreert ze de schoonheid van de ‘elementaire meetkunde’, in Euclidische stijl.

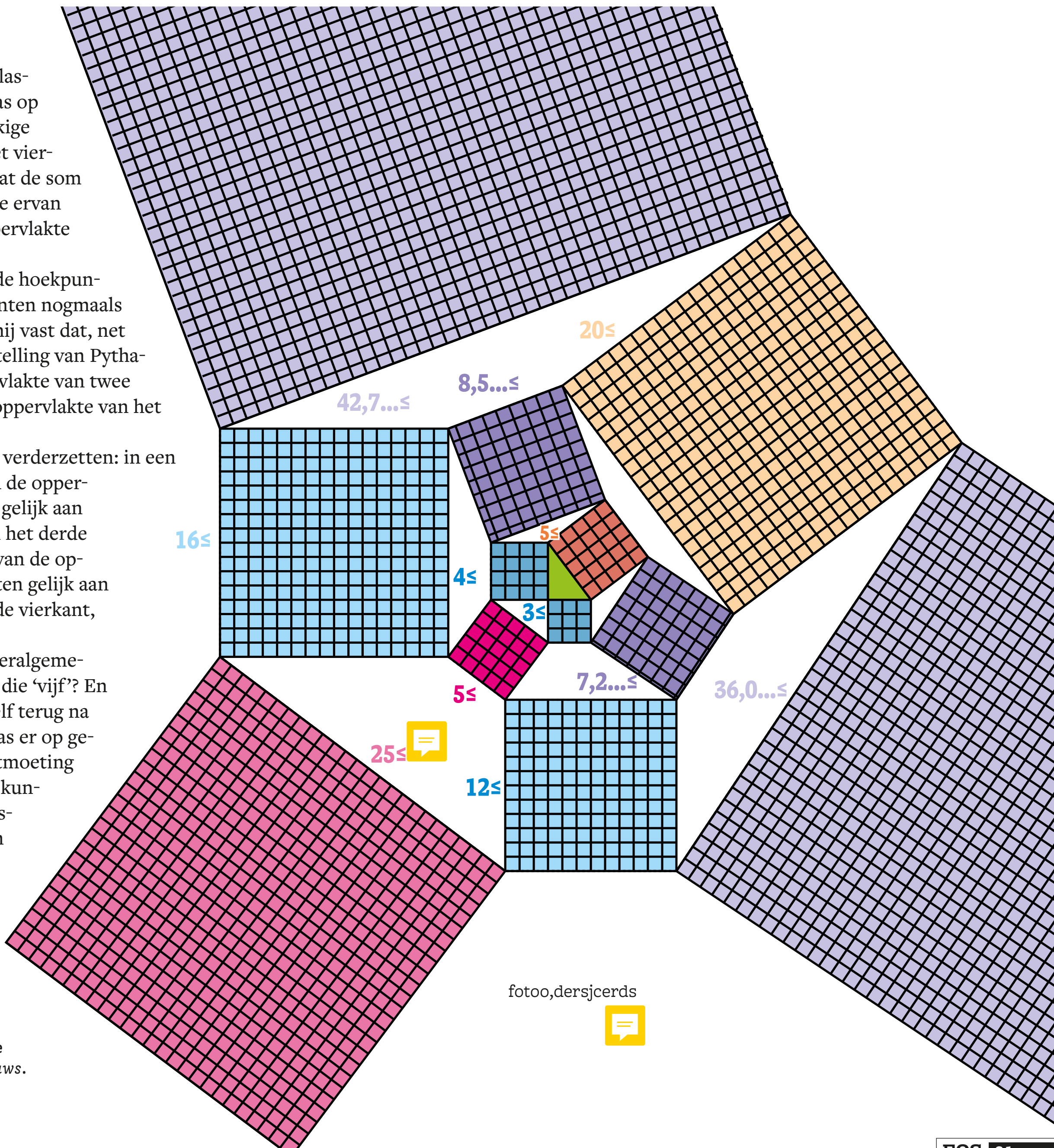


vierkanten die volgens de klassieke stelling van Pythagoras op de zijden van een rechthoekige driehoek staan opnieuw met vierkanten. Hij stelde nu vast dat de som van de oppervlakte van twee ervan gelijk is aan vijfmaal de oppervlakte van het derde vierkant.

Vervolgens verbond hij de hoekpunten van deze nieuwe vierkanten nogmaals met vierkanten. Nu stelde hij vast dat, net zoals bij de aanvankelijke stelling van Pythagoras, de som van de oppervlakte van twee vierkanten gelijk is aan de oppervlakte van het derde vierkant.

Dat proces kan je steeds verderzetten: in een volgende fase is de som van de oppervlakte van twee ervan weer gelijk aan vijfmaal de oppervlakte van het derde vierkant, daarna is de som van de oppervlakte van twee vierkanten gelijk aan de oppervlakte van het derde vierkant, enzovoort.

Het is een wonderlijke veralgemening, vindt Weiss. Vanwaar die ‘vijf’? En waarom komt de stelling zelf terug na elke tweede ‘laag’? Weiss was er op gestoten na een toevallige ontmoeting met de Japanse amateurwiskundige, maar hij bewees ze wiskundig, ‘zoals het hoort’, en probeert ook om ze zoveel mogelijk kenbaar te maken. Tweeduizend jaar na dato is het wonder van Pythagoras springlevend. ■



fotoo,dersjcerds

Dit artikel is in verkorte versie verschenen in *Het Laatste Nieuws*.