Een wiskundig bewijs is een perfect sluitende redenering die alleen gebruikmaakt van volledig ondubbelzinnig gedefinieerde concepten en een aantal elementaire logische principes. Een uitspraak is waar of fout. Een stelling is bewezen of niet. Een Japanse wiskundige beweert nu een bewijs te hebben gevonden voor de abc-conjectuur, een van de belangrijkste open problemen in de wiskunde. Maar dit bewijs is zo complex dat zelfs topwiskundigen zich er het hoofd over breken.

ABC-conjectuur: niet op een-twee-drie bewezen

Stefaan Vaes*

Karakter **57** (2017), 2-4

De Griekse wiskundige Euclides schreef ongeveer 300 jaar voor Christus *De Elementen*, een boek dat eeuwenlang een van de meest invloedrijke wiskundeteksten was. Een deel van dat boek gaat over de natuurlijke getallen 0, 1, 2, 3, ... Daarin bewees Euclides onder andere dat er oneindig veel priemgetallen zijn. Een priemgetal is een natuurlijk getal dat alleen maar deelbaar is door 1 en door zichzelf. Zo zijn 2, 3 en 5 de eerste priemgetallen en is 15 geen priemgetal omdat $15 = 3 \times 5$. Ook 2017 is trouwens een priemgetal. Het getal 90 is geen priemgetal, maar we kunnen 90 wel schrijven als een product van priemgetallen: $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$. We noemen 2, 3 en 5 de priemfactoren van 90. Eerst bewees Euclides dat op die manier elk natuurlijk getal op een unieke manier geschreven kan worden als een product van priemgetallen. Dan bewees Euclides als volgt *uit het ongerijmde* dat er oneindig veel priemgetallen zijn. Een dergelijk bewijs uit het ongerijmde begint met de veronderstelling dat de te bewijzen bewering fout is. Hieruit wordt dan een contradictie afgeleid en dit betekent dat de originele bewering waar moet zijn. Veronderstel dus dat er maar eindig veel priemgetallen zijn en noem hen $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Definieer dan het nieuwe getal $q = 1 + p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$ als 1 plus het product van al die priemgetallen. Merk op dat q geen veelvoud van p_1 kan zijn omdat dan ook 1 een veelvoud van p_1 zou zijn. Op dezelfde manier is q geen veelvoud van $p_2, \ldots, p_n$. Anderzijds kunnen we q schrijven als een product van priemgetallen $q = q_1 \times q_2 \times \cdots \times q_k$. Dan is q wel een veelvoud van elk van deze priemgetallen $q_1, \ldots, q_k$. Dit moeten dus allemaal nieuwe priemgetallen zijn, verschillend van $p_1, \ldots, p_n$. Bijgevolg is de initiële veronderstelling, namelijk dat er maar eindig

* KU Leuven, Department of Mathematics, Leuven (Belgium). E-mail: stefaan.vaes@kuleuven.be. Supported by European Research Council Consolidator Grant 614195, and by long term structural funding – Methusalem grant of the Flemish Government.

veel priemgetallen zijn, fout. De stelling van Euclides is dus bewezen – QED – *quod erat demonstrandum*.

Een uitspraak is waar of fout; een stelling is bewezen of zij is het niet

Een wiskundig bewijs is een perfect sluitende redenering die enkel gebruikmaakt van volledig ondubbelzinnig gedefinieerde concepten en een aantal elementaire logische principes. Dit geeft de wiskunde een bijzondere status vergeleken met de natuurwetenschappen, want de resultaten die bewezen werden in de oudheid zijn ook vandaag nog altijd geldig, zonder de minste wijziging of verfijning. Het geeft de wiskunde ook een bijzondere plaats naast de humane wetenschappen, want er zijn geen scholen of stromingen die strijden om het grote gelijk. Een uitspraak is waar of fout. Een stelling is bewezen of zij is het niet. Daarover bestaat geen discussie. In het begin van de twintigste eeuw ging men nog een stap verder en werden de basisprincipes en toegelaten logische redeneringen eens en voor altijd vastgelegd in een formele taal en zogenaamd axiomasysteem. Sindsdien zijn alle wiskundig bewezen stellingen even onomstotelijk en voor altijd waar, zoals 1 plus 1 gelijk is aan 2.

De hedendaagse wiskunde bestudeert problemen en vraagstukken die soms weliswaar makkelijk te formuleren zijn, maar waarvan de oplossing een duizelingwekkende complexiteit heeft

Of misschien toch niet? We bespreken in dit artikel de recente controverse rond de status van het bewijs van de *abc*-conjectuur. Die controverse toont hoe de aanvaarding van de correctheid van een bewijs voor een deel voortkomt uit een sociale consensus in de wiskundige gemeenschap en dus toch niet alleen uit een logisch-formele verificatie.

De hedendaagse wiskunde bestudeert problemen en vraagstukken die soms weliswaar makkelijk te formuleren zijn, maar waarvan de oplossing een duizelingwekkende complexiteit heeft. Eén van die vraagstukken stond lang gekend als de Laatste Stelling van Fermat, maar vindt eigenlijk al zijn oorsprong bij de oude Grieken. De pythagoreïsche drietallen, genoemd naar de Griekse wiskundige Pythagoras en zijn stelling over de lengtes van de zijden van een rechthoekige driehoek, zijn natuurlijke getallen a, b en c met $a^2 + b^2 = c^2$. Het eenvoudigste voorbeeld is $3^2 + 4^2 = 5^2$ en wordt handig gebruikt door bouwvakkers om een rechte hoek te maken: als je op de ene muur vanuit een hoek een afstand van 3 meter afmeet en op de andere 4 meter, dan moeten deze twee punten 5 meter van elkaar liggen. Maar wat als we de exponent 2 vervangen door een grotere gehele exponent n? Pierre de Fermat beweerde in 1637 dat er dan geen natuurlijke getallen a, b en c meer bestaan met $a^n + b^n = c^n$. Hij beweerde zelfs dat hij daarvoor een prachtig bewijs gevonden had maar dat de kantlijn van zijn boek te smal was om dat bewijs neer te schrijven. Honderden jaren beten wiskundigen van over de hele wereld hun tanden stuk op dit probleem, tot op 23 juni 1993 Andrew Wiles tijdens een lezing in Cambridge aankondigde dat hij de Laatste Stelling van Fermat bewezen had. ’s Anderendaags kopte *The New York Times*: ‘At last, shout of “eureka!” in age-old math mystery’. Maar in september 1993 werd er een fout gevonden in het bewijs van Wiles. Het duurde een jaar vooraleer hij die fout kon rechtzetten en daarna duurde het nog bijna een jaar vooraleer de wiskundige gemeenschap helemaal overtuigd was. Pas in mei 1995 verscheen het bewijs van Wiles in een 109 pagina’s lang artikel in *Annals of Mathematics*.

In principe is het mogelijk om de Stelling van Fermat en haar bewijs helemaal neer te schrijven in het formele logische systeem uit de vroege twintigste eeuw. Dan wordt elk stapje van het bewijs zo eenvoudig en geformaliseerd dat een computer de correctheid van het bewijs kan verifiëren. De realiteit is echter ongelooflijk veel complexer. De hedendaagse wiskunde maakt immers gebruik van concepten, methoden en redeneringen waarvan wiskundigen overtuigd zijn dat ze geformaliseerd kunnen worden, maar waarbij de effectieve formalisering letterlijk honderden jaren zou vergen. Een wiskundeartikel zoals dat van Andrew Wiles is dermate complex en steunt in die mate op decennia van gevorderd werk in de getaltheorie dat alleen de beste specialisten het werk van *a* tot *z* kunnen begrijpen en de correctheid van het bewijs kunnen verzekeren. Door de jaren heen blijft die groep van specialisten niettemin groeien zodat vandaag de hele wiskundige gemeenschap overtuigd is dat de Stelling van Fermat echt onomstotelijk bewezen is.

Een conjectuur of vermoeden in de wiskunde is een bewering waarvan de auteur ten stelligste overtuigd is maar waarvoor hij geen bewijs heeft

Een situatie zoals die met de Laatste Stelling van Fermat is hoogst uitzonderlijk. De overgrote meerderheid van de resultaten die wiskundigen vandaag bewijzen, worden tamelijk snel en zonder bijzondere discussies door de specialisten in het vakgebied aanvaard en correct bevonden. Maar heel af en toe kan het zelfs een stuk moeizamer verlopen. In 2012 kondigde de Japanse wiskundige Shinichi Mochizuki aan dat hij de *abc*-conjectuur bewezen had. Nu, meer dan vier jaar later, is er nog altijd geen consensus of zijn bewijs correct of fout is.

Een conjectuur of vermoeden in de wiskunde is een bewering waarvan de auteur ten stelligste overtuigd is maar waarvoor hij geen bewijs heeft. Sommige van die conjecturen houden tientallen of honderden jaren stand en werken zo als drijvende kracht voor het wiskundeonderzoek. Net zoals de Laatste Stelling van Fermat gaat de *abc*-conjectuur over natuurlijke getallen. Ze werd in 1985 geformuleerd door Joseph Oesterlé en David Masser. Sindsdien werd aangetoond dat een heleboel open problemen in de getaltheorie allemaal opgelost zijn van zodra we de *abc*-conjectuur kunnen bewijzen. Zelfs de Laatste Stelling van Fermat volgt uit een versie van de *abc*-conjectuur. Zo groeide dit uit tot een van de belangrijkste open problemen in de wiskunde.

Maar wat zegt de *abc*-conjectuur? Toen de Braziliaans-Canadese wiskundige Paulo Ribenboim in 2002 zijn kleinzoon op bezoek had en die aan Ribenboim vroeg waarmee hij toch de hele tijd bezig was, antwoordde hij fier dat hij aan de *abc*-conjectuur aan het werken was, waarop de kleinzoon zei dat dit helemaal niet zo moeilijk was en begon te zingen: ‘abc ... defg ... hijk ... lmnop ...’ Om de *abc*-conjectuur uit te leggen hebben we nog wat achtergrond nodig. Herinner je uit de eerste paragraaf dat elk natuurlijk getal n geschreven kan worden als een product van priemgetallen, de priemfactoren van n. Zo is bijvoorbeeld $588 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7$. Het product van de *verschillende* priemfactoren van n noemen we het radicaal van n en noteren we als $\mathrm{rad}(n)$. Zo is het radicaal van 588 gelijk aan $\mathrm{rad}(588) = 2 \times 3 \times 7 = 42$. Merk hierbij op dat we in de definitie van het radicaal elke priemfactor maar één keer gebruiken. Twee getallen a en b noemen we onderling ondeelbaar als ze geen gemeenschappelijke priemfactoren hebben. Zo zijn 21 en 100 onderling ondeelbaar. Maar 21 en 70 zijn niet onderling ondeelbaar want beide zijn een veelvoud van 7. De *abc*-conjectuur zegt ruwweg het volgende: wanneer a en b onderling ondeelbaar zijn en $a + b = c$, dan is over het algemeen het radicaal van $a \times b \times c$ niet veel kleiner dan c. En de wiskundigen wil ik de nauwkeurige betekenis van ‘over het algemeen’ en ‘niet veel kleiner’ niet onthouden: voor elk reëel getal $\gamma<1$, geldt dat $\mathrm{rad}(a \times b \times c) \geq c^{\gamma}$ op hoogstens eindig veel uitzonderingen na.

Op 30 augustus 2012 zet Shinichi Mochizuki vier artikelen op zijn persoonlijke website met als titel *Interuniversal Teichmüller Theory*, samen goed voor bijna 600 pagina’s van de allermoeilijkste wiskunde met ergens rond pagina 560 een bewijs voor de *abc*-conjectuur, steunend op al wat voorafgaat. Mochizuki is een gerespecteerde wiskundige, hoogleraar aan het prestigieuze Research Institute for Mathematical Sciences in Kyoto en voormalig doctoraatsstudent van Fieldsmedaillewinnaar Gerd Faltings in Princeton. Het nieuws verspreidde zich snel over de hele wereld en de wiskundigen die de artikelen van Mochizuki opensloegen, waren met verstomming geslagen. Drie dagen na het verschijnen van de artikelen schrijft Jordan Ellenberg van de University of Wisconsin op zijn blog: ‘Looking at it, you feel a bit like you might be reading a paper from the future, or from outer space.’ Eigenlijk komt het hierop neer. Wanneer een niet-wiskundige een recent wiskundeartikel openslaat, dan heeft hij al bij de eerste regels de indruk een tekst te lezen in een taal die hij niet begrijpt, vol vreemde formules en vol jargon waar hij nog nooit van gehoord heeft. Wanneer een wiskundige, ook de best getrainde specialist in getaltheorie, de artikelen van Mochizuki openslaat, heeft hij exact hetzelfde gevoel vanaf de eerste pagina's, en met nog 600 pagina's te gaan. Zo omschrijft ook Mochizuki zelf de situatie wanneer hij zegt dat de status van zijn werk in de getaltheorie een getrouwe miniatuurweergave is van de status van de abstracte wiskunde in onze maatschappij.

Je kunt de vier artikelen van Mochizuki vergelijken met de ontdekking van een reeks boeken geschreven in een onbekend schrift en een onbekende taal door een onbekende volksstam

Het belang en de potentiële implicaties van het werk van Mochizuki zijn echter gigantisch groot. Uit de *abc*-conjectuur volgt niet alleen de oplossing van een hele reeks open problemen in de getaltheorie. De methode van Mochizuki is ook zo fundamenteel nieuw dat ze kan leiden tot doorbraken in een heleboel domeinen van de wiskunde. De wiskunde is dus in zekere zin verplicht om tot een besluit te komen. Is het bewijs correct of niet? Topwiskundigen uit de hele wereld kwamen in december 2015 samen in Oxford met als bedoeling een beter begrip te krijgen van de Interuniversal Teichmüller Theory (IUT). De workshop eindigde met een algemeen gevoel van optimisme, maar zonder officiële witte rook. In juli 2016 organiseerde het RIMS in Kyoto, de thuisbasis van Mochizuki, een heuse IUT Summit. Sindsdien zijn er enkele wiskundigen die beweren de hele theorie doorgrond te hebben, maar het is veel te vroeg om aan te kondigen dat de *abc*-conjectuur echt bewezen is.

Hoe kan iets ooit zo moeilijk zijn dat zelfs de meest briljante wiskundigen van de wereld na al die jaren niet tot een definitieve conclusie kunnen komen? Eigenlijk heeft Mochizuki de hele wiskunde herschreven. Hij zegt zelf dat je zijn theorie alleen kunt begrijpen door alle denkpatronen die zich jarenlang in je brein gevestigd hebben, te verlaten en terug te keren naar een mindset die alleen gebruikmaakt van primitieve logische redeneringen. Je kunt de vier artikelen van Mochizuki vergelijken met de ontdekking van een reeks boeken geschreven in een onbekend schrift en een onbekende taal door een onbekende volksstam. De taak van de wetenschappers is nu om die boeken te lezen en te begrijpen. Daarenboven ligt de lat heel hoog. Er mag werkelijk geen enkele fout worden gemaakt. Het is alsof de wetenschappers die nieuwe taal zo goed moeten ontcijferen tot ze zelf een foutloze en grammaticaal perfecte tekst in deze taal kunnen schrijven. Dat vergt jaren tijd en doorzettingsvermogen en daar wringt voor een stuk het schoentje. Mochizuki schrijft zelfs dat een dergelijke mate van doorzetting en van volledig verlaten van gekende denkpatronen in het bijzonder moeilijk is voor onderzoekers die niet geschoold zijn in de Japanse traditie met haar grote aandacht voor concentratie en rigoureuze, diepgaande studie.

Ivan Fesenko van Nottingham University en twee onderzoekers in het RIMS in Kyoto, Go Yamashita en Yuichiro Hoshi, zijn heel ver gegaan in de studie van IUT. Als ‘aanmoediging’ voor de rest van de wiskundige gemeenschap schrijft Mochizuki dat het voorbeeld van Hoshi toont dat het mogelijk is om na tien jaar doorgedreven studie effectief IUT en het nodige vroegere werk te begrijpen. Dat soort inspanning is echter niet compatibel met de praktijk van het onderzoek vandaag. Misschien is het zelfs risicovol om als onderzoeker te diep door te dringen in IUT. In het beste geval begrijp je deze compleet nieuwe aanpak van de wiskunde zo goed dat je met behulp van IUT zelf originele resultaten kunt bewijzen of zelfs andere belangrijke open problemen in de getaltheorie kunt oplossen. Maar dan beland je vervolgens in dezelfde situatie als Mochizuki waarbij je de rest van de wiskundige gemeenschap moet overtuigen van de correctheid van de methode. Van de enkele wiskundigen die ondertussen beweren IUT te begrijpen, is nog niemand in staat gebleken dit begrip te delen met anderen. In een News Feature artikel in *Nature* in oktober 2015 vergelijkt een anonieme wiskundige deze situatie met Monty Pythons ‘The Funniest Joke in the World’. Wie deze grap hoort, sterft van het lachen. Daar komt nog bij dat zelfs wie er na doorgedreven inspanningen wel zou in slagen om IUT helder uit te leggen en om de wiskundige gemeenschap te overtuigen van de correctheid van het werk van Mochizuki, hiervoor niet noodzakelijk een grote erkenning zou krijgen. Hij of zij riskeert op lange termijn zelfs te verdwijnen in een voetnoot bij de Stelling van Mochizuki. Maar wat er ook gebeuren mag, het zal zeker nog vele jaren vergen vooraleer de Interuniversal Teichmüller Theory geheel of gedeeltelijk aanvaard wordt, laat staan gaat behoren tot het standaard arsenaal van methoden en technieken in de getaltheorie.

Davide Castelvecchi, ‘The biggest mystery in mathematics: Shinichi Mochizuki and the impenetrable proof’, in: *Nature*, 7 oktober 2015.