Wiskunde & Onderwijs 28ste jaargang (2002)

Logico-mathematisch denken tussen abstractie en aanschouwelijkheid : het verband tussen wiskundig, plastisch en muzikaal denken

Mark Reybrouck

"L'observateur doit être le photographe des phénomènes, son observation doit représenter exactement la nature. Il faut observer sans idée préconçue ; l'esprit de l'observateur doit être passif c'est-à-dire se taire ; il écoute la nature et écrit sous sa dictée. Mais une fois le fait constaté et le phénomène bien observé, l'idée arrive, le raisonnement intervient, et l'expérimentateur apparaît pour interpréter le phénomène."

Claude Bernard

Deze bijdrage is de derde in een reeks over het verband tussen muziek, wiskunde en beeld (Reybrouck [16] , [17]). Twee zaken werden reeds behandeld : de wiskunde van de stasis en de overgang en het ruimtelijke en tijdelijke denken in wiskunde en muziek. In deze bijdrage willen we de mogelijkheden onderzoeken van een formalisering van dit denken met de nadruk op de formele hulpmiddelen die hier kunnen dienstig zijn.

1. Denkprocessen tussen abstractie en aanschouwelijkheid

Dat de wiskunde zich leent tot denkprocessen is evident. Maar is het mogelijk om te spreken over denkprocessen bij muziek en beeldende kunsten ? Kunnen we spreken over plastisch en muzikaal denken, of is denken alleen het voorrecht van disciplines als wiskunde en taal ? Veel hangt hier af van de manier waarop het denken wordt gedefinieerd, maar ook van de manier waarop we met de inhoud van dit denken omgaan. Zo houdt wiskunde zich in grote mate bezig met de studie van *structuren*. Maar ook in de muziek en in de plastische kunsten kunnen we structuren onderscheiden. Er is echter nog geen traditie om kunst in termen van 'logico-mathematische structuren' te beschrijven en het toepassen van denkprocessen op de omgang met kunstproducten moet nog voor een deel gebeuren (Arnheim [1] ; Goodman [8] ; Broeckx [3] en Hofstadter [9]). Vaak ook is er weerstand tegen zo'n manier van werken, omdat men vreest dat een puur 'formele' benadering het esthetische element zou doen verdwijnen. Niets is echter minder waar. Hoe kunnen we immers tot esthetisch genoegen komen als we de onderliggende *structuur* niet kunnen vatten ? De grotere toegankelijkheid van populaire en commerciële muziek in vergelijking met veel ernstige muziek kan hier als voorbeeld dienen. Maar hetzelfde geldt ook voor de figuratieve schilderkunst, die zich veel gemakkelijker laat appreciëren dan veel vormen van abstracte kunst. Vaak is het ontbreken van enige vorm van herkenbaarheid de grootste drempel om een kunstwerk au sérieux te nemen. Herkenbaarheid wordt echter al te vaak gelijkgesteld met 'verwijzing' naar iets anders. Een schilderij dat iets afbeeldt kan dan terugvallen op de structuur van de afgebeelde werkelijkheid. Bij abstracte schilderkunst is deze verwijzing uiteraard veel minder evident. We moeten hier terugvallen op een structuur die in het schilderij zelf besloten ligt. Het gaat dan niet meer om een *externe verwijzing* maar om *de inwendige structuur* die begrepen is in het kunstwerk zelf.

Het probleem stelt zich nog scherper bij de muziek. Muziek kan immers wel verwijzen naar iets buitenmuzikaals, maar haar eigenlijke betekenis ligt toch in de klinkende structuur. Het probleem werd door Valéry [19] zeer mooi verwoord in zijn omschrijving van muziek als een gelijktijdige ontwikkeling van verschillende partijen, die zich met elkaar verweven en uit elkaar losmaken. Tegenover de substantie van het muziekwerk (het klinkende materiaal) stelt hij het organiserend vermogen om er gebruik van te maken, om het vast te leggen en opnieuw te ontwerpen. De klanken en de klinkende eenheden zijn immers geschikt voor de vorming van heldere combinaties, uitwerkingen op het vlak van de opeenvolging en de gelijktijdigheid, reeksen akkoorden en vervlechtingen die intelligibel genoemd kunnen worden. Daarom ook is het mogelijk om met de muziek op abstracte wijze om te gaan.

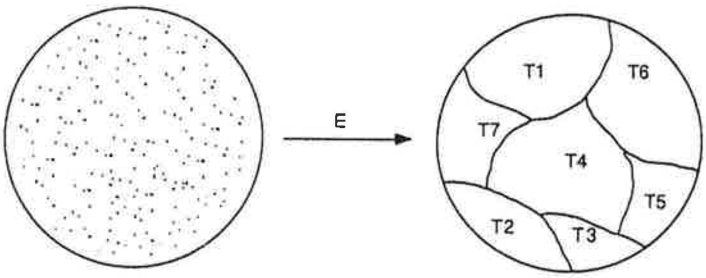
Dit alles is echter vrij abstract en algemeen. Het is dan ook de vraag welke denkprocessen we kunnen toepassen op de omgang met muziek ? Veel hangt hier af van de manier waarop de 'muzikale structuur' wordt opgevat. In de regel gaat het bij een structuur om een *systeemsamenhang* of een verzameling van relaties tussen de elementen of subsystemen van het systeem. Twee zaken zijn hier verder van belang : de aard van de elementen en de aard van hun onderlinge relaties. Het zijn vooral deze laatste die aan bepaalde wetmatigheden onderhevig kunnen zijn.

2. Systeem, structuur en elementen: het muzikale toonsysteem

Het uitgangspunt voor de analyse van een systeem is de verzameling in wiskundige zin. Zo'n verzameling wordt uitsluitend gedefinieerd door haar elementen zonder dat er sprake is van enige beperking met betrekking tot de aard en het aantal van die elementen, en zonder dat er enige orde of relatie tussen deze elementen is gedefinieerd. Op deze elementen kunnen dan operaties worden toegepast.

Het afbakenen van *elementen* is echter dikwijls problematisch. Het is in de regel geen zuiver objectief proces omdat het op beslissingen en niet op objectieve feiten steunt. Wat zijn bijvoorbeeld de elementen van een beeldhouwwerk of van een schilderij, en wat zijn de eigenlijke muzikale elementen ? In tegenstelling immers tot de wiskunde, waar we op basis van primitieve eenheden (punt, rechte, vlak...) tot de beschrijving van complexe figuren kunnen overgaan, is er bijvoorbeeld in de muziek geen eenduidig begrippenapparaat. Er bestaan wel eenheden waarmee de traditionele muzikale analyse altijd heeft gewerkt (noot, motief, thema, volzin e.a....) maar vaak gaat het toch om slecht gedefinieerde begrippen die eerder op intuïtie dan op formele analyse steunen. De eerste voorwaarde om de omgang met muziek op een meer objectieve wijze te omschrijven, is dan ook het ontwerpen van een begrippenapparaat om alle elementen op exacte wijze te kunnen definiëren.

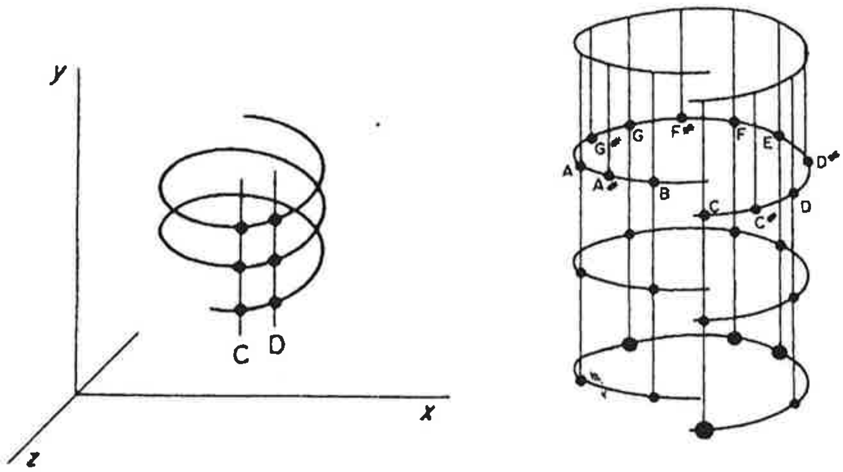
De meest voor de hand liggende verzameling van elementen is die van de *toonhoogtes* en *toonhoogterelaties*. Het gaat dan om een 'toonsysteem' dat als voorbeeld kan dienen voor een 'formeel systeem'. Zo'n toonsysteem is geen abstract systeem, maar een stelsel van verhoudingen die uitdrukkelijk op het geluidsmateriaal betrokken zijn. Ze beantwoorden aan een sterk 'reducerende' manier van denken, omdat de muzikale structuur tot klanken of tonen wordt herleid, waarbij alleen het 'hoogteaspect' bepalend is voor de organisatie van het systeem. De zintuiglijke rijkdom van de klinkende elementen wordt met andere woorden tot een 'positionele bepaaldheid' in de muzikale ruimte ingeperkt. Toch is het begrip zeer handig omdat het elementen afbakent in een universum dat in principe onbegrensd is. Zo kunnen we uit toonsystemen met een oneindig aantal elementen toonstelsels afbakenen door de elementen te rangschikken in *quotiëntengroepen*. We gebruiken dan 'quotiëntenverzamelingen', waarbij een verzameling *M* door een equivalentierelatie verdeeld wordt in een aantal van elkaar gescheiden (paarsgewijs disjuncte) niet-lege verzamelingen. De equivalentierelatie brengt met andere woorden een verdeling aan in de verzameling *M*, zodat die uiteengelegd wordt in een aantal equivalentieklassen. Men spreekt hier ook wel van een 'partitie' ($M/E = \{ T1 , T2 , T3 , T4 , T5 , T6 , T7 \}$, d.w.z. de quotiëntenverzameling van *M* naar *E* geeft een verzameling van equivalentieklassen, die als 'isomorfe nevenklassen' van de verzamelingen worden aangeduid (Caeyers en Teugels [4]).



Figuur 1. Grafische voorstelling van het uiteenleggen van een verzameling van elementen in een aantal equivalentieklassen op basis van een equivalentierelatie E.

Zo behoren bijvoorbeeld alle do's tot dezelfde klasse, onafgezien van de octaafligging waarin ze zich bevinden (een hoge of een lage do blijft altijd een do). Het gaat dan om een toonsysteem als een 'periodiek' of 'cyclisch systeem' van *toonklassen,* waarbij de noten in de verschillende octaafliggingen telkens tot dezelfde toonklassen worden herleid, en niet om het 'lineaire systeem' van toonhoogtes die mekaar opvolgen van laag naar hoog. Elke toonhoogte staat dan voor een *klasse van tonen,* die dezelfde plaats innemen op de toonschaal en die als nevenklasse elementen bevat uit dezelfde perceptuele categorie. De verschillende perceptuele categorieën zijn dan disjuncte klassen met voor elke klasse een specifieke naam (de notennaam). Het geheel is schematisch weergegeven in figuur 2. De linkertekening illustreert het principe van de octaafliggingen, waarbij een basistoonladder van do groot (de 7 witte toetsen op de piano, te beginnen bij de do) zich spiraalsgewijze ontvouwt, om na 7 toonhoogtes opnieuw dezelfde plaats in te nemen, maar dan in een hogere winding. De spiraal combineert het lineaire aspect van de toename van de toonhoogte (het mee volgen van de winding) en het periodieke aspect van de herhaalde noten of toonklassen (de verticale strepen). De rechtertekening gaat meer in detail. Het gaat opnieuw om de toonladder van do groot (in letterbenaming: c - d - e - f - g - a -

b), met een grotere of kleinere afstand tussen de noten (hele of halve toon, zie Reybrouck [17]). Onderaan staat de basistoonladder met aanduiding van het functioneel gewicht van elke noot (de dikte van de punten). Daarboven staat de diatonische versie (alleen maar witte toetsen) en daarboven de chromatische versie (witte en zwarte toetsen) (zie verder). Er is telkens maar één winding weergegeven, maar in principe kan het systeem als een spiraal worden ontvouwd waarbij in steeds hogere octaafliggingen dezelfde toonklassen worden weergegeven.

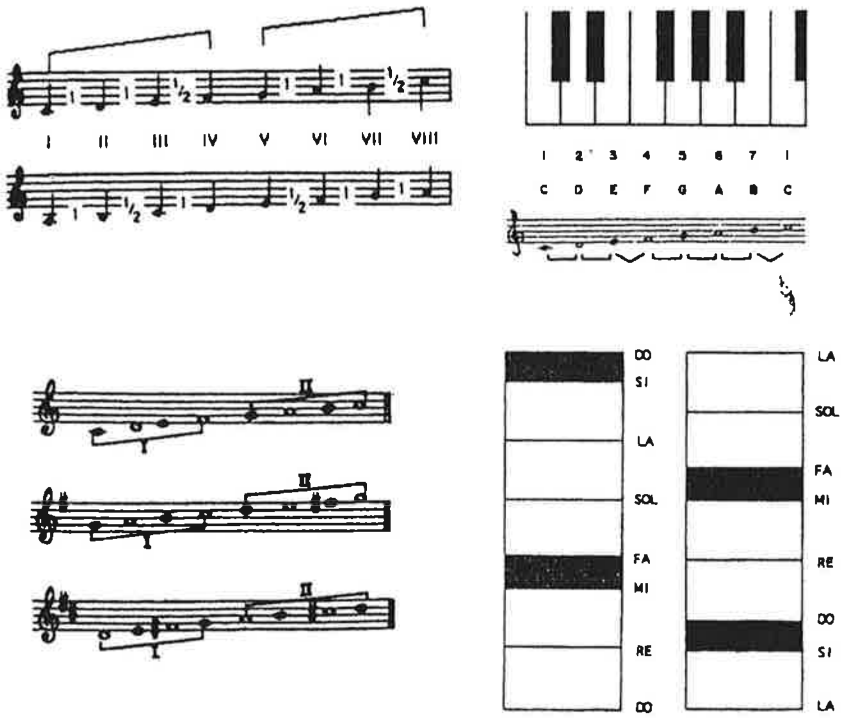


Figuur 2. Toonhoogtespiraal als combinatie van een lineair en periodiek systeem. Links zijn drie octaafliggingen afgebeeld, rechts staat onderaan de basistoonladder van do groot met daarboven een diatonisch (7 noten) en een chromatisch (12 noten) toonsysteem.

Toonsystemen zijn verder gekenmerkt door cultureel bepaalde graden van complexiteit. Dit betekent dat ze uit verscheidene *ordeningsniveaus* zijn opgebouwd, die betrekking hebben op het aantal elementen en de onderlinge afstand tussen deze elementen. Nemen we bijvoorbeeld van een muziekstuk alle noten, dan kunnen we die op basis van hun toonhoogte klasseren. Zo kunnen we alle do's, alle re's, alle mi's enz. in afzonderlijke klassen onderbrengen, en deze dan rangschikken van laag naar hoog. We bekomen dan een *toonladder* in de letterlijke zin. Het begrip is uiterst handig omdat het toelaat om aan de verschillende noten een rangordering te geven en ze ook te nummeren. Zo kunnen we spreken van de trappen van de toonladder.

Toonladders verschillen echter van mekaar op basis van hun ordeningsniveau. Zo bevat het eerste en meest algemene ordeningsniveau een selectie van het aantal toegelaten *toonhoogtes* en *intervalgroottes* (de afstand tussen de toegelaten hoogtes). Dit zijn de *toongeslachten* of *genera*. Zo heeft een pentatonisch toongeslacht vijf toonhoogtes, in tegenstelling tot een heptatonisch toongeslacht dat er zeven heeft. Een toongeslacht met 5 gelijke toonafstanden (pentatoniek) is uiteraard eenvoudiger dan een systeem met zeven (diatonisch) of twaalf toonhoogtes (chromatisch). Er zijn zelfs primitieve toonsystemen met slechts twee of drie toonhoogtes, en sommige Oosterse toonsystemen hebben er dan weer meer dan twaalf. Het tweede ordeningsniveau betreft de *toonsoorten* of *modi*. Deze berusten op de onderlinge rangschikking van de afstanden tussen de toonhoogtes van het toongeslacht, en de hiërarchische organisatie van de tonen in de toonladder. Zo zijn bijvoorbeeld niet alle tonen even belangrijk. Bepaalde noten geven hun naam aan de toonladder en dragen als het ware de toonladder (grondtoon), terwijl andere noten ergens in het midden van de toonladder een verwijdering van die grondtoon suggereren. In die zin hebben de verschillende noten een verschillend functioneel gewicht. We gaan hier echter omwille van het technische karakter niet verder op in. Het derde ordeningsniveau tenslotte is dit van de *toonaarden.* Deze berusten op een verschillende klinkende actualisering van dezelfde toonsoort op een ander toonhoogteveld. Ze verschillen dus onderling alleen door de plaatsing van hun grondtoon. De innerlijke verhoudingen van de af-stand tussen de toonhoogtes en de functies van hun tonen daarentegen zijn gelijk (Broeckx [3]).

Dit alles is echter vrij abstract. Om een en ander toe te lichten geven we in figuur 3 een overzicht. Rechts bovenaan staan de toetsen van een pianoklavier. Het spelen van de witte toetsen geeft een diatonisch 'toongeslacht' (7 noten). Diezelfde noten kunnen echter aanleiding geven tot twee 'toonsoorten'. In de ladderfiguurtjes staan 'do groot' en 'la klein' afgebeeld. Het gaat in beide gevallen om dezelfde noten, en ook de afstanden tussen de noten zijn gelijk (5 hele en 2 halve tonen), maar de plaats van deze afstanden is gewijzigd. Do groot begint met 2 hele tonen, la klein met 1 hele en 1 halve toon. De terts op de grondtoon (een terts is een afstand tussen 3 noten) is dus groot (2 tonen) of klein (1,5 tonen). Daarom spreekt men ook van do groot (majeur) of la klein (mineur). Links staan bovenaan diezelfde twee basistoonladders (do groot en la klein) afgebeeld op de notenbalk. Daaronder staan drie voorbeelden van 'toonaarden', die allemaal dezelfde onderlinge verhouding hebben van hele en halve noten, maar die telkens beginnen met een andere grondnoot. Daarom worden de toonaarden genoemd naar deze toon (do groot, sol groot, re groot). Om de verhoudingen te laten kloppen zijn er enkele aanpassingen gebeurd door middel van wijzigingstekens (één of twee kruisen).



Figuur 3. Overzicht van de organisatieniveaus van toonsystemen: toonaard, toonsoort en toongeslacht.

Muziek is echter niet alleen terug te brengen tot toonhoogterelaties. In het algemeen gaat het om een complexe interactie van *structurele variabelen.* Zo zijn er naast de toonhoogte ook nog *toonduurverhoudingen* en verhoudingen van *toonsterkte*, naast de complexe en subtiele schakeringen van *toonkleur.* Het gaat dus om een samenspel van veel factoren die allemaal vervat liggen in het medium zelf. Muziek verwijst immers in principe alleen maar naar zichzelf, wat het dan ook mogelijk maakt om de muzikale structuur in puur formele termen te beschrijven.

3. Van inductie naar deductie: abstractie en symbolisch denken

Structuurdenken is belangrijk omdat het breed toepasbaar is. En hetzelfde geldt voor het gebruik van formele hulpmiddelen bij het denken. Ze overstijgen specifieke vormen van denken omdat ze op veel domeinen van kennis kunnen worden toegepast. Zo is het mogelijk om de logico-mathematische operaties van de wiskunde en de logica ook op andere disciplines toe te passen. Het gaat dan om een *formalisering* van de kennis en het middel bij uitstek om dit te realiseren is het gebruik van een 'geformaliseerde taal'. Zo'n kunstvormige omvorming van de natuurlijke taal heeft een technische en een wetenschappelijke motivatie, omdat ze tegemoetkomt aan de behoefte aan 'exact' en 'ondubbelzinnig' taalgebruik. Wetenschap vereist immers een aangepaste *nomenclatuur*, waarbij elke term slechts één bepaalde betekenis heeft. De toepassing van dit principe in taxonomische wetenschappen als scheikunde, mineralogie en biologie heeft haar deugdelijkheid reeds lang bewezen. Maar ook bij het 'denken' en het 'redeneren' kan een technisch taalgebruik verhelderend werken. Zo bestaan de eerste oefeningen in de logica er meestal in om de natuurlijke argumenten van de gewone omgangstaal om te zetten in de geformaliseerde argumenten van een artificiële taal. Natuurlijke argumenten zijn immers meestal niet gesteld in standaardvorm, maar bevatten ook overvloedig en overtollig materiaal, terwijl anderzijds vaak essentiële argumenten niet aanwezig zijn. *Formalisatie* is dan niets anders dan het herschrijven van de argumenten in een uitgezuiverde of geregulariseerde vorm, waarin alle essentiële onderdelen expliciet worden aangebracht en alle niet-relevante onderdelen worden weggelaten.

De voordelen van *formalisatie* zijn talrijk : systematisatie van het hele gebeuren, een betere communicatie door duidelijkheid, een economische manier van denken, meer heuristische mogelijkheden en een betere toepasbaarheid. Wetenschappelijk taalgebruik heeft immers nood aan *purificatie*, *simplificatie* en *systematisatie*, en symbolisch taalgebruik is het middel bij uitstek om dit te realiseren. Symbolen laten immers toe om op een mentaal vlak te opereren en op een overzichtelijke wijze de vorm van denkoperaties weer te geven. De eenvoudige toepassing van een algoritme of het schrijven van een computerprogramma kunnen hier als voorbeeld dienen. Het gaat immers om een nauwkeurig omschreven, eenduidig voorschrift om problemen op te lossen door het uitvoeren van een aantal elementaire operaties in een opeenvolging die vooraf is gedefinieerd. Meestal gebeurt dit op objecten als letters, cijfers of symbolen.

De formele benadering impliceert dus de mogelijkheid tot 'abstractie' en tot 'symbolisch denken', wat voor een deel overeenkomt met de invulling van de *traditionele logica.* Volgens

Wertheimer [20] gaat het daarbij om enkele operaties, die omwille van hun algemeenheid uiterst nuttig kunnen zijn :

- analyse
- abstractie
- veralgemening
- vorming van klasse-concepten
- onderbrengen in meeromvattende categorieën (subsumptie)
- vormen van proposities
- vormen van afleidingen
- vormen van syllogismen.

Uitgaande van deze operaties is het dan mogelijk om op exacte wijze *deductief* te redeneren. Het is echter ook mogelijk om *inductief* te opereren. Het gaat dan om een aantal andere eigenschappen zoals :

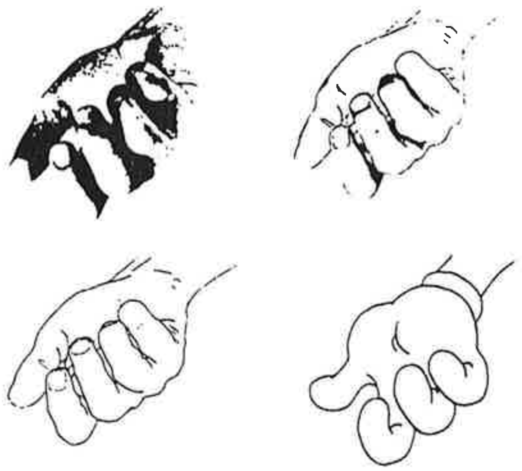
- empirische observatie
- zorgvuldig verzamelen van feitenmateriaal
- empirisch bestuderen van problemen
- introduceren van experimentele methoden
- in correlatie brengen van feiten
- ontwikkelen van procedures om te testen.

We kunnen dus een onderscheid maken tussen de *axiomatisch-deductieve* en *inductief-heuristische* benadering van de werkelijkheid. Het zijn twee manieren van kennisverwerving die mekaar niet uitsluiten, maar die complementair zijn aan mekaar. Het proces van het *ervaren* kan echter in dit alles niet voldoende worden onderstreept. Het vormt de basistechniek van het ondervragen van de natuur en ligt aan de basis van de inductieve methode, waarbij men van het bijzondere naar het algemene gaat. De zintuiglijke ervaring blijft met andere woorden een belangrijk uitgangspunt voor veel vormen van kennis. Er is dan ook geen wezenlijk onderscheid tussen iemand die aandachtig alle details van een schilderij bekijkt en iemand die een meetkundige constructie bestudeert. Het gaat in beide gevallen om een inductief-heuristische manier van werken, waarbij elk zintuiglijk gegeven als een mogelijk probleem kan worden opgevat. Zo gauw echter het zintuiglijke afspeuren een onderzoekend en probleemoplossend karakter krijgt, wordt de gratuite omgang met het materiaal verlaten en worden denkprocessen ingeschakeld. Deze impliceren echter steeds een minimale vorm van afstandname en abstractie ten opzichte van het zintuiglijke materiaal.

4. Abstractieprocessen en het belang van afstandname

Het kritische onderscheid tussen de 'deductieve' en de 'inductieve' manier van denken ligt in de mate van abstractie ten opzichte van het zintuiglijke materiaal. Het is enigszins verwant met twee manieren van kennisverwerving, die volgens Descartes de grondbegrippen uitmaken van de mathematische kennis in het algemeen : *intuïtie* en *deductie*. De intuïtie levert de principes die geen verdere uitleg nodig hebben. Ze zijn 'onmiddellijk' klaar omdat de dingen als het ware oplichten uit zichzelf. De deductieve vorm van opereren daarentegen werkt niet zo direct. Hier is een 'middellijke' bewijsvoering nodig op basis van axioma's die 'onmiddellijk' evident zijn. Het denken verloopt hier in stappen en tussenstappen om te komen tot de eindconclusie. De onmiddellijke aanschouwing is echter grotendeels verdwenen, en het geheel is gekenmerkt door een verregaande abstractie ten opzichte van het zintuiglijke materiaal. Het is een nadeel, dat echter enigszins gecompenseerd wordt door de vele voordelen van de formalisatie en de symbolisatie. Toch blijft de zintuiglijke toetsing erg belangrijk. Maar zintuiglijke ervaring die niet uitgaat boven het particuliere karakter van de concrete ervaring schiet te kort op het vlak van de algemeenheid. Als we bij het spreken voor elke gedachte en elke gebeurtenis een nieuw woord zouden moeten uitvinden, dan zou er nauwelijks communicatie mogelijk zijn. Het is dus erg belangrijk dat we leren abstraheren en onderlinge verschillen verwaarlozen ten voordele van de gemeenschappelijke elementen.

Het vermogen tot abstraheren is dus een fundamentele intellectuele operatie. Ze kan herleid worden tot de basisprocessen van *onderscheiden* en *veralgemenen*, waarbij objecten, ondanks hun individuele verschillen, aan klassen of categorieën worden toegewezen. Het gaat dan om een abstractie in de letterlijke zin : alles wat niet essentieel is, wordt weggestreept, en alleen de diepere betekeniskern blijft over.



Figuur 4. Afbeelding van een hand, met een toenemende mate van abstractie.

De abstractie kan echter op veel manieren worden ingevuld. Ze heeft in de eerste plaats te maken met *afstandname* ten opzichte van het concrete materiaal. Het onderscheid tussen een foto en een tekening (zie figuur 4) kan hier als voorbeeld dienen. Een foto beeldt alles af, een tekening laat reeds heel wat elementen weg. Er zijn dus gradaties in de wijze waarop we omgaan met het materiaal. Zo is een cartoon veel meer schematisch dan een natuurgetrouwe tekening. En het gebruik van begrippen uit de taal gaat nog verder omdat hier ook naar virtuele elementen wordt verwezen. Zo kunnen we een begrip als 'paard' in de verbeelding invullen met ieder willekeurig paard. Er is hier echter nog altijd een verwijzing. De wiskunde daarentegen heeft die verwijzing niet meer nodig. Zo is het een gemeenplaats dat de wiskunde begon toen de waarneming van drie appels bevrijd werd van de appels en vervangen werd door het getal drie.

Een andere invulling van abstractie is de abstractie als *idealisering* (Davis & Hersh [7]). Ze wordt geïllustreerd door een timmerman, die een metalen lat vasthoudt en een potloodlijn tekent op een plank om hem te helpen bij het snijden. De lijn is een fysisch ding. Het is de afzetting van grafiet op de oppervlakte van een echte plank. Diezelfde lijn heeft ook een breedte en een dikte, die verschilt van plaats tot plaats. En in het volgen van de scherpe rand van de lat reageert de top van het potlood op de ongelijkheden van de oppervlakte van de plank. Het resultaat is dan een lijn die hier en daar gekromd is en gerimpeld. Het is een echt, 'concreet' voorbeeld van een rechte lijn. Daarnaast bestaat er echter ook een mentaal idee van de mathematische abstractie van een 'ideale' rechte lijn. In deze geïdealiseerde versie zijn alle toevalligheden en onvolkomenheden van het concrete voorbeeld weggenomen. Het is een geïdealiseerde, cosmetische, verbale beschrijving van een rechte lijn als die curve waarvan elk onderdeel de kortste afstand is tussen twee punten. Een verdere stap is dan het opgeven van alle noties van een 'werkelijke' rechte lijn ten voordele van een 'axiomatische beschrijving' van een rechte lijn (een rechte lijn is een verzameling van punten, die tenminste twee punten bevat ; twee afzonderlijke punten zijn bevat in één en dezelfde lijn, enz...). Zo'n ideale rechte lijn leidt dan verder tot heel wat idealiseringen en ideale constructies zoals vlakken, vierkanten, veelhoeken, cirkels, kubussen, polyhedrische sferen e.a. Sommige daarvan zijn ongedefini-eerd (bijvoorbeeld punten, lijnen, vlakken), andere (bijvoorbeeld de kubus) kunnen worden gedefinieerd in termen van eenvoudiger begrippen. In de regel echter zal elk concreet voorbeeld van een kubus (bijvoorbeeld een kubisch kristal) onvolkomenheden vertonen, en elke eigenschap van een kubus die mathematisch is afgeleid, kan slechts bij benadering door de concrete werkelijkheid worden geverifieerd.

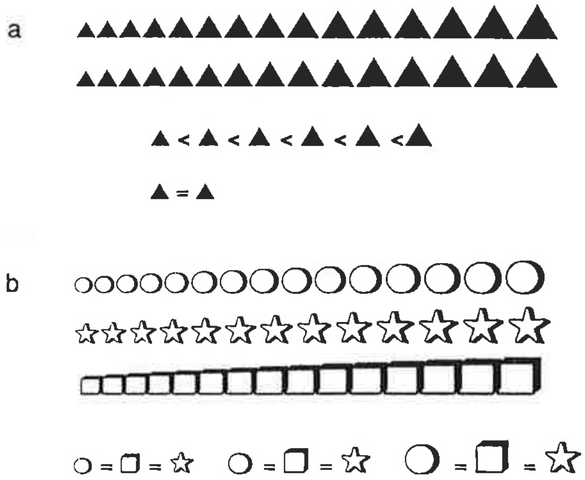
Abstractie is verder ook nog belangrijk voor het theoretische denken en voor de *begripsvorming* in het algemeen. Dit laatste is immers alleen maar mogelijk als de 'onmiddellijkheid' van de zintuiglijke ervaring wordt overstegen. Om tot de essentie van een begrip door te dringen moeten we 'afstand' nemen van het voorwerp van onze kennis. Slechts dan laat de ideale vorm zich kennen. Het is een vorm van 'middellijke' kennis die terugvalt op de categorieën van het verstand en niet op de 'onmiddellijkheid' van de zintuiglijke ervaring. Het fysieke contact met de dingen wordt dan vervangen door een mentale omgang met de dingen.

5. Classificatie en seriatie : de structuur van 'groupement'

Het abstractieproces is uitvoerig onderzocht door Piaget [12]. Zo omschrijft hij de *logico-mathematische operaties* als abstracties van de concrete operaties die we kunnen uitvoeren op de voorwerpen van onze kennis. Het gaat dan om zeer algemene mentale operaties zoals 'verzamelen', 'ordenen' en 'in verband brengen met elkaar', die uiteindelijk tot vier processen kunnen leiden :

- klasseren (inbedding van onderdeel in groter geheel)
- seriëren (orderelatie)
- in correspondentie brengen
- combineren.

Het belang van deze processen kan moeilijk worden overschat. Vooral het dubbele aspect van *seriatie en classificatie* is erg belangrijk. Het zijn de eerste uitgebalanceerde structuren in de ontwikkeling van de intelligentie. Ze spelen zich af op het niveau van de 'concrete operaties' en maken gebruik van *equivalentie-* en *orderelaties*. Zo zijn er talloze opdrachten te bedenken waarbij een kind concrete objecten moet rangschikken in een bepaalde volgorde (van klein naar groot, van licht naar zwaar, van laag naar hoog, van dun naar breed (zie figuur 5). Zo'n willekeurig proces van 'ordening' van objecten op basis van hun eigenschappen (seriatie) impliceert echter ook een vorm van 'classificatie', omdat de objecten niet alleen in een bepaalde rangschikking worden opgenomen, maar omdat aan gelijke elementen steeds dezelfde plaats moet~~en~~ worden toegewezen. Elke classificatie impliceert dus ook een relatie van *insluiting* die op haar beurt niet kan worden losgemaakt van de relatie van gelijkheid. En die is uiteindelijk niets anders dan het vermogen om te groeperen. Gelijke elementen behoren dan tot dezelfde equivalentieklassen en worden onderling verbonden door een equivalentierelatie.



Figuur 5. Classificatie en seriatie.

Dit dubbele aspect van classificatie en seriatie heeft een mathematische uitdrukking gevonden in de structuur van *groupement* (Piaget [11]). In tegenstelling tot de logico-mathematische operaties van de volwassenen, beweegt de logica van de kinderen zich immers op het niveau van de concrete operaties. Het gaat daarbij om acties, die onderling voldoende zijn gecoördineerd om in een totaalstructuur te worden opgenomen. De operaties zijn echter 'concreet', wat betekent dat ze worden uitgevoerd in de aanwezigheid van concrete gegevens. De structuur van de 'groupement" wordt dan formeel beschreven als een quadrupel $\langle E, +, -, \leq \rangle$, waarbij E staat voor een eindige verzameling van objecten, die partieel geordend zijn door de relatie '$\leq$' [deze is transitief, reflexief en antisymmetrisch], en waarbij '+' en '-' twee binaire operaties aanduiden, waarvoor 6 eigenschappen geldig zijn :

- de operatie '+' heeft alleen betrekking op bepaalde elementen van E, in die zin dat ze alleen kan worden uitgevoerd tussen aangrenzende elementen van een reeks
- de operatie '+' is associatief ($(x+y)+z = x+(y+z)$)
- de operatie '-', is de omgekeerde bewerking van '+', en is onderworpen aan dezelfde restricties
- er bestaat een neutraal element (0), zodat voor elke $x \in E$, $x+0 = x = 0+x$ en $x-0 = x$

- de operatie '+' is idempotent (de optelling van x voegt niets toe aan x, m.a.w. $x + x = x$)
- de operatie '+' is zodanig dat, als $x \leq y$, dan is $x + y = y$.

De 'groupement' is mathematisch een weinig bevredigende structuur. Toch heeft ze een aantal voordelen. Zo laten de tweede en de derde eigenschap (associativiteit en inverse operatie) zowel een verwijdering van en een terugkeer naar het vertrekpunt toe, en de vijfde en de zesde eigenschap tonen het belang van het opslorpen van de voorafgaande klassen van elementen door de erop volgende klassen bij reeksen met een partiële ordening.

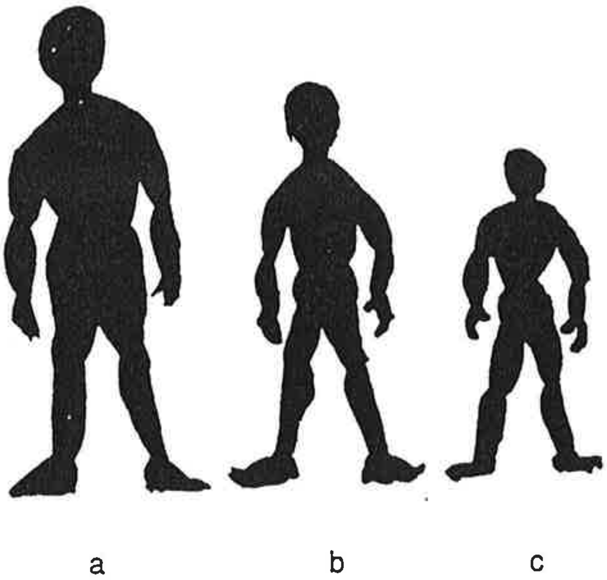
Het vraagt verder ook relatief weinig moeite om de structuur van 'groupement' toe te passen op het luisteren naar muziek. We moeten dan alleen de klinkende elementen vervangen door een formeel equivalent ervan in het bewustzijn van de luisteraar. We horen dan geen klanken maar betekenisvolle elementen die we kunnen samenvoegen tot segmenten in de tijd. Het gaat daarbij om 'lineaire verzamelingen' die door het classificatieproces als 'eenheden' worden opgevat, met als belangrijke eigenschap dat elke eenheid met uitzondering van de laatste gevolgd wordt door een andere, en waarbij we de relatie $\leq$ definiëren als 'deel uitmakend van een grotere klasse' of als 'voorafgaand in de tijd'.

6. Selectie en combinatie : klassen, equivalentierelaties en contiguïteit

Het is mogelijk om de basisprocessen van klasseren en rangschikken uit te breiden tot vormen van ordening die niet noodzakelijk gebonden zijn aan het concreet-zintuiglijke materiaal. Het gaat dan om abstractieprocessen die verband houden met *klassen* en *relaties* in het algemeen. Beide begrippen zijn immers niet te scheiden. Zo is het afbakenen van een klasse alleen maar mogelijk op basis van relaties van overeenstemming of van verschil. Gelijke elementen horen in dezelfde klasse, alle andere elementen maken er geen deel van uit. Het gaat dus om *equivalentieklassen* in de strikte zin waarbij de equivalentierelatie als criterium voor selectie geldt. Toch zijn klassen geen relaties. We moeten met andere woorden het *dingbewustzijn* van het *relatiebewustzijn* scheiden. Zo geeft figuur 6 een voorbeeld van de combinatie van dingtekens en relatietekens. De dingtekens zijn in dit geval iconisch (ze lijken op wat ze afbeelden), de relatietekens verwijzen naar de operaties van groeperen, optellen, vermenigvuldigen en het aanduiden van gelijkheid.

Figuur 6. Voorbeeld van een combinatie van dingtekens en relatietekens.

Het dingbewustzijn kan alle mogelijke vormen doorlopen van concreet naar abstract. Het relatiebewustijn daarentegen is gericht is op betrekkingsvormen. Het laat toe om op een puur abstract en relationeel niveau met elementen om te gaan. In de wiskunde is dit evident. Het gebruik van symbolen in de algebra is bijvoorbeeld een handige manier om op een overzichtelijke manier de relaties tussen elementen aan te duiden. Maar ook in andere domeinen is het mogelijk om in puur relationele termen een aantal dingen te beschrijven. Zo kunnen we figuur 7 als ($a > b > c$) beschrijven. De materiële invulling van de elementen heeft dan geen belang en het geheel wordt gekenmerkt door een graad van ontstoffelijking zonder verwijzing naar de concrete elementen. Het gaat alleen om de betrekkingen tussen de dingen, en niet om de dingen zelf.



Figuur 7. Voorbeeld van relationeel bewustzijn. Niet de afgebeelde elementen zijn van belang, wel hun onderlinge relaties ($a > b > c$).

Het gaat dus bij het relatiebewustzijn om mentale operaties die breed toepasbaar zijn, en die betrekking hebben op het ordenen van het materiaal. We kunnen hier twee soorten *relaties* onderscheiden :

- symmetrische relaties : gelijkheid en verschil
- asymmetrische relaties : $a < b$, a voor b , a links van b , a lager dan b , a hoger dan b ...

De symmetrische relaties hebben betrekking op de 'classificatie' (equivalentierelaties), de a-symmetrische op de 'seriëring' (ordeningsrelaties). Het zijn de basisrelaties die het mogelijk maken om basiseenheden te bepalen en ze onderling te schikken in een reeks. Op die eenheden kunnen dan ook *operaties* worden toegepast zoals de 'thetische' en de 'lytische' operaties van het *groeperen* en het *segmenteren.* Specifiek voor de wiskunde kunnen we de volgende basisoperaties onderscheiden :

- optellen
- aftrekken
- vermenigvuldigen
- delen
- nagaan van gelijkheid of ongelijkheid.

Equivalentierelaties zijn dus niet de enige relaties. Ze dienen alleen maar voor de afbakening van de elementen. Minstens even belangrijk zijn de asymmetrische relaties van ordening. Zo is bijvoorbeeld de *opeenvolgingsrelatie* een asymmetrische relatie, die betrekking heeft op de ordening van 'aangrenzende' elementen van een reeks. Het gaat met andere woorden om het principe van de contiguïteit.

De 'contiguïteit' vormt samen met het 'klassebegrip' de eerste vorm van ordening van elementen die mekaar opvolgen in de tijd. Een zin bestaat bijvoorbeeld uit een aantal woorden die als een ketting zijn aaneengeregen. De woorden vormen een beperkte selectie uit het lexicon. Ze kunnen echter worden vervangen door andere woorden met hetzelfde grammaticale statuut. In een zin als 'Toen Els van haar vader haar eerste poes kreeg...' kan het woord 'toen' vervangen worden door 'nadat', 'wanneer', 'terwijl', e.a. En hetzelfde geldt voor alle andere woorden van de zin. Het gaat hier dus om *equivalentieklassen* in de brede zin. De woorden worden echter ook aaneengevoegd, waarbij het ene woord telkens aangrenst aan het andere. Dit is de *contiguiteit* die typisch is voor tijdskunsten in het algemeen. Het lezen van een gesproken tekst, bijvoorbeeld, gebeurt in de regel van links naar rechts, met een richting die overeenkomt met de voortgang van de tijd. Hetzelfde geldt uiteraard ook voor muziek, waarbij het luisteren gelijke tred houdt met de voortgang van de tijd. Bij het lezen van een tekst kunnen we eventueel nog terugkeren naar wat we reeds gelezen hebben. Bij het luisteren naar een tekst of naar muziek is dit in principe niet meer mogelijk. Het is wel mogelijk als we terugvallen op de functie van de verbeelding. Zo kunnen we in gedachten navigeren door de tijd. We kunnen bijvoorbeeld bij het horen van een muzikaal fragment dit fragment herkennen als iets dat reeds geklonken heeft. Het geheugen stelt ons dan in staat om de contiguïteit te overschrijden en verbindingen te maken tussen elementen die in feite niet aangrenzend zijn. Het gaat met andere woorden om een ineengrijpen van elementen met een verschillend tijdsstatuut (verleden - heden - toekomst), wat dan kan leiden tot een soort netwerk van relaties dat voor een deel de muzikale structuur bepaalt. Het probleem wordt echter nog verder gecompliceerd door het verschillend 'ontologische' statuut van de elementen die men onderling vergelijkt. We hebben dit probleem reeds in een vorige bijdrage aangekaart (Reybrouck [16]). Klinkende elementen zijn effectief aanwijsbaar. Ze bestaan echt en zijn dus 'actueel' en 'existentieel'. Elementen die alleen maar bestaan in de verbeelding daarentegen zijn alleen maar 'virtueel'. De verbeelding heeft hier een plaatsvervangende functie door elementen die niet echt aanwezig zijn als het ware opnieuw opnieuw voor te stellen (re-'presentatie'). Neemt men echter bij het luisteren voldoende afstand van de klinkende materie, dan is het mogelijk om ook op een formeel en abstract niveau met de klinkende elementen om te gaan, waarbij aan klinkende en niet- klinkende elementen hetzelfde statuut wordt toegekend. Het gaat dan om de gelijkstelling van elementen 'in praesentia' met elementen 'in absentia'. Dit is de eigenlijke overgang naar het symbolische denken, waarbij we met een mentaal equivalent en niet met de eigenlijke klanken werken. Het verband met de taal en met de algebra ligt voor de hand.

7. Wiskundig, plastisch en muzikaal denken : perceptuele basis en formeel-symbolisch begrippenapparaat

Abstractieprocessen zijn belangrijk bij de uitbouw van ons begrippenapparaat. Ze liggen aan de basis van veel denkprocessen en digitale vormen van taal. Het gaat dan om een vorm van denken, waarbij het bewustzijn met 'discrete eenheden' werkt, eerder dan met de werkelijkheid die zich in haar zintuiglijkheid ontvouwt. Het is het belangrijke onderscheid *tussen discreet-digitaal* en *continu-analoog*. De 'digitale' benadering heeft betrekking op afzonderlijke elementen die gescheiden zijn van elkaar, en op basis van een alles-of-niets-manier kunnen worden aangeduid. De woorden van de taal en de getallen uit de wiskunde zijn typische voorbeelden. De 'analoge' benadering daarentegen werkt niet met afgelijnde en afgescheiden categorieën, maar met vormen van overgang die eerder continu zijn dan discreet.

Beide vormen hebben voor- en nadelen. De digitale benadering heeft het voordeel van de snelheid en van de economie van het denken. Puur verbaal denken – als voorbeeld van een digitale vorm van denken – is echter ook het prototype van het gedachtenloos denken, omdat we automatisch terugvallen op verbanden die vanuit het geheugen worden opgeroepen. Het is nuttig maar steriel (Arnheim [1]). Analoog denken daarentegen heeft oog voor overgangen en voor de continuïteit van de zintuiglijke verschijningsvorm.

Het onderscheid is erg belangrijk en heeft gevolgen voor het wiskunde-onderwijs. Men kan immers zowel een *analoog-experimentele* (ook analoge) en *analytische* benadering van de wiskunde onderscheiden (Davis & Hersh [7]). De 'analoge' wiskunde lijkt gemakkelijk, ze kan vlug worden aangeleerd en maakt nauwelijks gebruik van de symbolische structuren van de 'schoolse' wiskunde. Ze wordt bedreven door iedereen die zich bezighoudt met ruimtelijke relaties en alledaagse technologie. Maar hoewel ze soms gemakkelijk lijkt en schijnbaar weinig moeite vraagt, kan ze toch voor problemen zorgen. Zo is het begrijpen van de schikking en de relaties van de onderdelen van een complexe machine, of het intuïtief vatten van de essentie van een complex systeem niet altijd zo eenvoudig. Zo'n inzicht wordt dan vaak niet uitgedrukt in woorden, maar wordt eerder aangevoeld. Het wordt begrepen en niet echt geëxpliciteerd. Analoge wiskunde wordt daarom ook wel *kwalitatieve* wiskunde genoemd, omdat ze oog heeft voor inzicht en intuïtie, eerder dan voor de getalsmatige uitdrukking van dit inzicht. Het is een benadering die door veel grote mathematici bij herhaling werd gepropageerd, en die duidelijk ingaat tegen de puur *formele* benadering, die gekenmerkt wordt door het loskomen van de concrete ervaring en van het zintuiglijke materiaal. Bij 'analytische' wiskunde daarentegen overheerst het symbolische materiaal. Het bedrijven ervan is lastig. Het vraagt een doorgedreven training en vraagt voortdurende verificatie door de mathematische gemeenschap omdat onmiddellijke zintuiglijke toetsing in het algemeen niet mogelijk is. Daartegenover heeft ze wel het voordeel van de exactheid. Waar het niet mogelijk is om de intuïties van iemand anders expliciet te toetsen, is het wel mogelijk om een analytische bewijsvoering tot in de details te verifiëren.

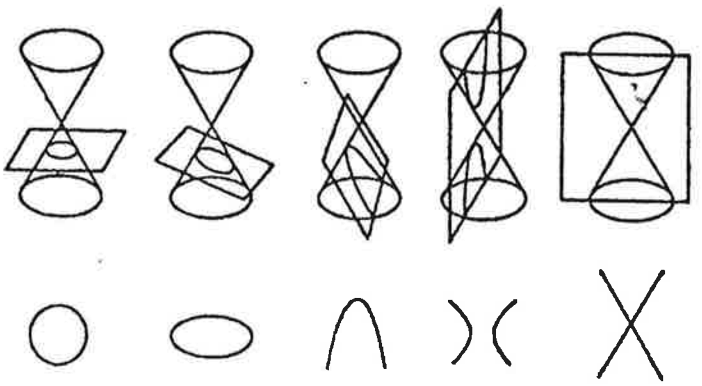
Wiskunde heeft dus zowel een 'formele' als een 'intuïtieve' en 'aanschouwelijke' basis. We geloven dan ook in de complementariteit van disciplines als wiskunde, plastische kunsten en muziek, die respectievelijk gekenmerkt zijn door volledige abstractie (wiskunde), volledige aanschouwelijkheid (plastische kunsten) en iets wat daar ergens tussenin staat (muziek). Het dooreenmengen van abstracte denkwijzen en vormen van zintuiglijke toetsing kan echter voor elk van de drie disciplines vruchtbaar zijn. Zo heeft het *visuele denken* een plasticiteit die het *lineair-verbale denken* niet bezit. Een visuele voorstelling biedt verder ook een blijvend resultaat waar we in principe onbeperkt naar kunnen kijken. Ze geeft dus gelijktijdig weer wat zich successief afspeelt in de tijd. In die zin overstijgt ze de lineariteit van het axiomatisch-deductieve denken ten voordele van een verregaande beweeglijkheid, die ons toelaat om te navigeren doorheen de tijd. Het lijkt een beetje op het lezen van een tekst. We kunnen op elke plaats beginnen lezen, maar we kunnen steeds teruggrijpen naar wat eraan voorafgaat of wat erop volgt. De verschillende fasen van de tijd zijn dan niet langer geordend in een relatie van opeenvolging maar van gelijktijdigheid. Het resultaat is dan een verregaande plasticiteit van de mentale operaties die men uitvoert.

Meteen ook wordt duidelijk waarom de plastische kunsten zich zoveel gemakkelijker lenen tot 'synoptisch' overzicht. Het is het basisonderscheid tussen 'hier' en 'daar' en 'nu' en 'later'. Bij een ruimtelijke afstand tussen twee punten gaat het alleen maar om een ruimtelijk verwijderd zijn, om de scheiding tussen twee plaatsen in de ruimte. 'Hier' kan door een eenvoudige beweging van de hand in 'daar' veranderd worden. Bij de overgang van de ene naar een andere plaats is er immers geen voorkeursrichting. We kunnen van hier naar daar gaan, maar ook omgekeerd. Beide plaatsen kunnen verder ook gelijktijdig worden aangewezen, omdat ze effectief aanwezig zijn. De momenten van de tijd daarentegen hebben niet diezelfde mate van beweeglijkheid. De tijd heeft steeds één richting die in principe onomkeerbaar is (Cassirer [5]).

Het 'visuele denken' heeft dus duidelijk een aantal troeven. Het is een manier van denken die het proces van vinden en uitvinden bevordert door het benadrukken van inzicht en aanschouwelijkheid. Het is minder rigide dan het algoritmische denken van het probleemoplossen, met het benadrukken van bewijsvoering en de publieke standaard van de evidentie. Zo'n denken is wel vruchtbaar, maar niet productief. Het blijft immers in essentie lineair en sequentieel, precies zoals de taal. Het echte productieve denken daarentegen, wordt gekenmerkt door een gelijktijdigheid van het overzicht.

We kunnen ons dan ook vragen stellen naar de zinvolheid en het belang van de *perceptuele basis* van de wiskunde. Levert de zintuiglijke toetsing een meerwaarde aan het wiskundig inzicht, en welke zintuiglijke toetsing wordt hier bedoeld ? Gaat het om een louter visuele basis of speelt ook de tastzin of zelfs het bewegingsgevoel een rol ? Wellicht kan het voorbeeld van de *kegelsneden* hier een antwoord geven (Arnheim [1]).

Het is mogelijk om de kegelsneden op een zuiver visuele wijze te beschrijven (zie figuur 8).



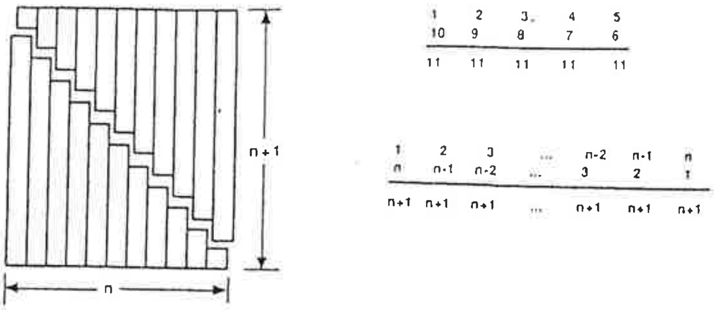
Figuur 8. Overzicht van de kegelsneden: cirkel, ellips, parabool, hyperbool en rechte lijn.

Wat we dan zien, zijn duidelijk herkenbare, maar verschillende vormen (rechte lijn, cirkel, ellips, parabool en hyperbool). Het is echter ook mogelijk om die vormen te zien als afzonderlijke fasen of momentopnames van een continue beweging. Als we een kegel doorsnijden met evenwijdige of schuine sneden, dan is het resultaat een cirkel, een ellips, of één van de andere kegelsneden. Het zijn kritische momenten in een continue overgang. Of anders uitgedrukt : de continue overgang leidt tot kwalitatieve veranderingen, die rechtstreeks verband houden met het vlak van snijding. Als dit vlak de kegel nadert, parallel met de eigenlijke as ervan, dan is het resultaat aanvankelijk een hyperbool. Naarmate echter het vlak de as meer nadert, groeit de hyperbool en wordt ze steeds maar puntiger. En uiteindelijk gaat ze over in twee rechte lijnen die mekaar snijden. De hyperbool en de rechte lijnen zijn dus het resultaat van een continue overgang, maar ze presenteren zich wel als kwalitatief verschillende elementen. En hetzelfde geldt voor het snijvlak dat zich horizontaal verplaatst. Startend in het midden is er eerst een punt, dat geleidelijk een cirkel wordt, en als het snijvlak ook nog schuin gaat hellen, wordt die cirkel een ellips of zelfs een parabool.

Het voorbeeld is bijzonder instructief. Het toont de spanning tussen een *continue overgang* en *discrete momenten* met een kwalitatief gewicht en het laat toe om geometrische vormen te behandelen als 'statische begrippen' binnen een 'dynamisch eenheidsconcept'. Dit laatste is dan een vorm van *perceptueel herstructureren* waarbij de ellips als een vervormde cirkel, en de rechte lijn als een grensgeval van de parabool kan worden opgevat. Het laat ons toe om in Poncelets termen te spreken over een verbreding van onze manier van denken, waarbij een continue ketting loopt tussen begrippen die gescheiden lijken van elkaar. In ieder geval tonen de kegelsneden hoe *begripsvorming* verband houdt met het waarnemen van structurele eenvoud. De perceptie van afgelijnde en eenvoudige vormen is anders als ze het resultaat zijn van ontstaan en transformatie.

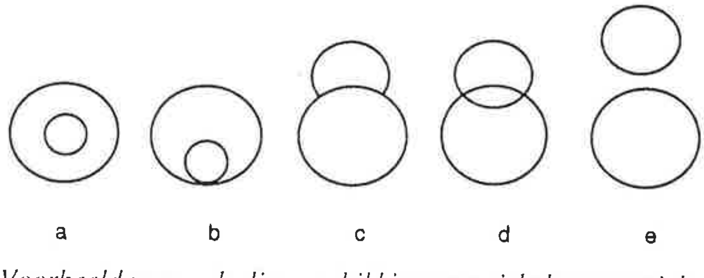
In die zin kunnen we pleiten om de *formele uitwerking* van het logico-mathematische begrippenapparaat niet los te koppelen van de *visuele basis*. Voor de meetkunde is dit evident. De meetkunde staat echter ook als geen andere discipline model voor de 'axiomatisch-deductieve' manier van redeneren. De exploratie van basisvormen heeft dan ook een aanzienlijk aandeel bij de mathematisering van het brein. Maar ook de algebra heeft een perceptuele basis. De waarneming in het algemeen heeft immers meer te maken met 'relaties' dan met 'absolute grootheden', en in de zintuiglijke ervaring komt het algemene altijd voor het bijzondere. Zo tonen bijvoorbeeld gekleurde Cuisenaire-staafjes de relaties tussen grootheden. Hun absolute lengte is niet echt belangrijk en kan gemakkelijk worden aangepast. Hetzelfde geldt trouwens ook voor de muziek, waar bijvoorbeeld de notenwaarden (de duur van de noten) als relatieve verhoudingen moeten worden opgevat. Zo is een hele noot twee maal zo lang als een halve noot, en een halve tweemaal zo lang als een kwartnoot. Het gaat dus om een systeem van verhoudingen, waarbij grotere en kleinere notenwaarden zich numeriek verhouden tot elkaar. Wil men de muziek echter effectief ook laten klinken, dan moet er aan die 'relatieve' verhouding ook nog een 'absolute' tempoaanduiding worden toegevoegd.

Het probleem wordt enigszins geschetst in figuur 9. Het gaat hier om drie notatie- of representatiewijzen voor de grootte van een aantal staafjes. De linkerfiguur is een afbeelding die lijkt op wat ze afbeeldt. Ze is *iconisch*, en geeft onmiddellijk de relatieve verhouding van de lengtes van de staafjes. Ze geeft echter geen uitsluitsel over hun absolute lengte. Hiervoor is een maateenheid nodig, en die wordt geïntroduceerd door de invoering van het cijfer 1. In de rechterfiguur staan bovenaan een *numerieke* notatie. Hier worden de lengtes in getallen omgezet. Deze voorstelling is heel duidelijk, maar is beperkt toepasbaar omdat de getallen reeds concreet zijn ingevuld. In de onderste voorstelling staat dan een hybried *numeriek-algebraïsch* representatiesysteem. De invoering van variabelen (n) in plaats van concrete getallen maakt het systeem meer algemeen toepasbaar. Het is een winst die echter ten koste gaat van de aanschouwelijkheid van de voorstelling.



Figuur 9. Overzicht van notatie- en representatiesystemen. De linkerfiguur is iconisch, de rechterfiguur is numeriek (boven) en numeriek-algebraïsch (onder).

De visuele voorstelling kan dus leiden tot een betere ontsluitbaarheid. Het is een krachtig hulpmiddel dat echter nooit in de plaats kan komen van het *symbolische* denken. Het heeft wel enkele voordelen, die verband houden met het hoger geschetste onderscheid tussen discreet en continu. Zo kan een ruimtelijke figuur (bijvoorbeeld een gesloten curve) continuïteiten en overgangen suggereren, maar ook relaties van gelijkheid of verschil. Maar ook andere logische relaties kunnen worden weergegeven door de nabijheid of afstand tussen de grenzen van de figuur (zie figuur 10). Het gebruik *van Venn-diagrammen* en van *Booleaanse operatoren* wijst trouwens in dezelfde richting, en van hieruit is het kleine stap naar de *topologie* en de *verzamelingenleer*.



Figuur 10. Voorbeeld van onderlinge schikking van cirkels ten opzichte van elkaar: a. concentrisch, b. randen raken mekaar, c. inbedding, d. transparant, e. scheiding.

Toch is de visuele basis niet echt noodzakelijk voor het uitvoeren van mentale operaties. Volledige flexibiliteit vereist immers een vorm van loskomen van het zintuiglijke materiaal, en alleen het symbolische denken kan dit doen. Het is de bekende overgang van 'concrete' naar 'formele' operaties, en dit wordt op ideale wijze geïllustreerd door de algebra, waar symbolen in de plaats komen van de werkelijkheid. Algebra is echter moeilijk door te voeren zonder potlood en papier. De schriftelijke neerslag – zij het dan in symbolische vorm – is ook hier belangrijk. Ze toont de koppeling van de aanschouwelijke en abstracte manier van opereren. En hetzelfde geldt ook voor een componist die gebruik maakt van een blad met notenbalken om zijn muziek te componeren. De grafische neerslag geeft een blijvend resultaat dat gebruik maakt van de visuele omweg om met de klinkende elementen op een mentaal vlak te kunnen opereren.

Het gaat dus in wezen om het onderscheid tussen *intuïtieve* en *symbolische* kennis. Volgens Leibniz – de vertegenwoordiger bij uitstek van de formalistische strekking in de wiskunde – kunnen we ze eigenlijk niet scheiden van elkaar. Intuïtie biedt de grondslagen van de wiskunde, symbolische kennis biedt de mogelijkheid om de bewijsvoering in logische stappen door te voeren. Toch blijft dit onderscheid nog steeds een spanningsveld, zoals gebleken is uit het recente lijdensverhaal van de vernieuwde wiskunde. We verwijzen hier naar de *invloedrijke formalistische strekking* rond Nicolas Bourbaki, waartegen intussen een zeer sterke reactie is gekomen. Het meer recente onderzoek pleit dan ook voor de herwaardering van het concrete en het toepasbare, en in teksten en verhandelingen is er terug meer aandacht voor voorbeelden en wordt het belang van de strikte formele voorstelling toch wat afgezwakt.

8. Symbolisch denken en virtuele gelijktijdigheid

De *formele benadering* van onze kennis heeft dus duidelijk een aantal tekorten. Ze heeft echter ook aanzienlijke voordelen die vooral op rekening te brengen zijn van de *economie van het denken.* We zetten voor alle duidelijkheid de mogelijkheden op een rijtje :

- werkelijkheid herleiden tot grote categorieën
- symboolgebruik
- gebruik van notatiesystemen
- beklemtonen van overgang en relaties boven de inhouden
- bevrijding van de zintuiglijkheid : het systeem wordt autonoom en zelfbevattend
- axiomatisch-deductieve manier van denken
- formele schoonheid van bewijsvoering : esthetisch element
- gevaar : verlies van aanschouwelijke basis.

Toch heeft de formele benadering ook veel gevaren. Ze herleidt de denkprocessen tot een lineaire reeks en trekt een ééndimensioneel parcours doorheen het landschap van concepten. Ze herleidt de gelijktijdigheid van de ruimtelijke structuur tot een lineaire opeenvolging en doet dan ook geen recht aan alle interacties tussen de verschillende krachtvelden in de vierdimensionele wereld van 'opeenvolging' en 'ruimtelijke gelijktijdigheid'. Het is eigenlijk de manier van redeneren die door een gerichte pijl kan worden voorgesteld (Arnheim [1]).

We willen dan ook pleiten om aan de formele benadering een aanschouwelijke basis te geven, niet in die zin van een *iconische* afbeelding maar als een *grafische* neerslag die de voordelen van het visuele medium combineert met de economie van het symbolische denken. Dit wordt trouwens al op een aantal vlakken toegepast. We denken aan het gebruik van Venn-diagrammen en de visualisering van de basisoperaties in de klassenlogica. Maar men kan hier nog veel verder gaan door het gebruik van schema's, diagrammen, mappen, kaarten en netwerken. Het komt er dan op aan dat de formele benadering gecombineerd wordt met een aanschouwelijke basis. Twee zaken zijn hier van belang : de manier van voorstellen van elementen en de relaties tussen deze elementen. Traditioneel kunnen we hier terugvallen op symbolische tekens, die op hun beurt nog eens uiteenvallen in *dingtekens* en *relatietekens*. Er is op dit vlak nog zeer veel mogelijk. Vooral de wiskunde heeft een sterk ontwikkeld symbolenapparaat dat een mooie aanvulling vormt voor de tekens van de natuurlijke taal. Zo zijn er de getallen van 0 tot 9 en de manieren om ze aan mekaar te voegen, te delen en te vermenigvuldigen met 10. Er zijn operatietekens als + , - , × , / en √, speciale mathematische getallen als π, tekens voor graden , groeperingstekens als { }, relatietekens (= , > , <) e.a. De calculus gebruikt nog andere tekens voor differentialen en voor integralen en de mathematische lettertypes bevatten enkele honderden speciale tekens. Daarnaast worden er nog altijd nieuwe symbolen gecreëerd, maar meestal overleven slechts de handigste symbolen. De grootste demper op de creatie van nieuwe tekens is wellicht het gebruik van de computer met een beperkte verzameling van lettertypes en van toetsen (David & Hersh [7]).

Het toepassen van formeel-symbolisch denken op de omgang met muziek en plastische kunsten vereist dan ook in de eerste plaatst het ontwerpen van een *symbolensysteem*. Voor de muziek bestaat er reeds zo'n uitgewerkt systeem – het traditionele notenschrift – dat echter voor de operaties van het denken niet voldoet. Het notenschrift is een productienotatie, die alleen maar noten weergeeft en dan nog alleen maar op het vlak van de toonhoogte en de toonduur. Het is een reductionistische manier van noteren, die gericht is op het uitvoeren van de klinkende elementen op een vrij hoog niveau van resolutie (we gebruiken hier de term naar analogie met de resolutie van een afbeelding, de pixels kunnen we dan bijvoorbeeld vervangen door de individuele noten). Het laat echter nauwelijks toe om deze elementen onderling te combineren tot grotere tekens en het heeft geen bevredigend systeem voor de relatietekens. Het komt er dus op aan om creatief te zijn in het ontwerpen van nieuwe notatiesystemen, en men kan daarbij te rade gaan bij de symboolsystemen in het algemeen (zie Goodman [8]).

Zo'n symboolsysteem wordt gekenmerkt door *karakters* (de eigenlijke symbolen) en manieren om ze onderling te combineren met elkaar. De karakters moeten herleidbaar zijn tot een beperkte voorraad (eindig), maar ze moeten ook duidelijk herkenbaar en vooral ook onderscheidbaar zijn. Alle leden van een karakter kunnen verder worden uitgewisseld zonder dat dit gevolgen heeft voor de syntaxis van het systeem. Karakters hebben dus een klasse-eigenschap en worden gekenmerkt door een equivalentierelatie met betrekking tot hun elementen.

De voordelen van de symbolische notatie zijn groot. Ze laten toe om het denkproces gelijktijdig voor te stellen. Daarvoor moet echter elke denkinhoud vervangen worden door een teken, zodat we alles simultaan kunnen overzien. Men kan zich echter vragen stellen naar de aard en het aantal van de elementen die we als inhoud van ons denken kunnen definiëren, en hier kunnen we terugvallen op de analogie met de ervaring in het algemeen. Deze wordt in de filosofie van Kant herleid tot de drie synthetische momenten van *substantialiteit, causaliteit* en *wisselwerking*, wat dan staat voor 'standvastigheid', 'opeenvolging' en 'gelijktijdigheid'. Het is een ongewoon krachtige reductie die enorme mogelijkheden biedt voor het ontwerpen van een 'symbolisch notatiesysteem'. Vooral het aspect van de gelijktijdigheid is erg belangrijk. Ook Leibniz heeft hier bij herhaling op gewezen : om echt stringent te zijn moet een bewijsvoering zich losweken uit de sfeer van het loutere herinneringsweten. In de plaats van de successiviteit van de denkschreden moet een zuivere gelijktijdigheid van het overzicht komen, en alleen het symbolische denken kan dit doen. Het is een fenomeen dat elke schrijver kent. Om overzicht te hebben moet men alles gelijktijdig kunnen overzien. Het schrijven van een tekst op een tekstverwerker is dan ook in die mate moeilijk dat er slechts één venster is geopend. Is men echter lange tijd bezig met dezelfde tekst, dan kan men de niet-zichtbare tekst als het ware gelijktijdig in de verbeelding oproepen. En hetzelfde geldt voor het studeren van een cursus. De herhaalde contactname met de materie maakt ze als het ware op elk ogenblik beschikbaar, zodat we het gevoel hebben dat de inhoud zich in een synthetisch moment van gelijktijdigheid synoptisch presenteert. Dit alles gaat dan wel ten nadele van de zintuiglijke rijkdom van de voorstelling.

Het hele abstractieproces kan dan ook alleen maar functioneren als we loskomen van de eigenlijke 'zintuiglijkheid' en van de strikte 'contiguïteit'. Een kind dat alleen maar functioneert in de aanwezigheid van concrete objecten, en dat alleen relaties kan leggen tussen elementen die mekaar opvolgen in een lineaire reeks komt nooit tot de logica van de volwassene, die gekenmerkt wordt door beweeglijkheid en omkeerbaarheid van de operaties. Het zijn belangrijke kenmerken van de 'wiskundige groepsstructuur' en van 'algebraïsche structuren' in het algemeen.

Bibliografie

1. **R. Arnheim**, *Visual Thinking*, Faber and Faber Limited, London, 1969.

2. **C. Bernard**, *Introduction a l'étude de la médecine expérimentale*, Editions Pierre Belrond, Paris, 1966/1866.

3. **J. L. Broeckx**, *Muziek, ratio en affect*, Metropolis, Antwerpen, 1981.

4. **H. Caeyers** en **J. Teugels**, *De groepstructuur basis van muzikaal denken*, Wiskunde & Onderwijs 40 (1984), 10de jaargang, 637 - 649.

5. **E. Cassirer**, *Philosophie der symbolischen Formen. Erster Teil. Die Sprache,* Bruno Cassirer, Oxford, 1956/1923.

6. **A. Comte**, *Cours de philosophie positive. I. Leçons 1 à 45*, Hermann, Paris, 1998.

7. **Ph. Davis** en **R. Hersh**, *The Mathematica! Experience*, Butler & Tanner, Frome -London, 1990/1981.

8. **N. Goodman**, *Languages of Art. An Approach to a Theory of Symbols*, Hackett Publishing Company, Indianapolis, 1976.

9. **D. Hofstadter**, *Gödel, Escher, Bach. An Eternal Golden Braid. A Metaphorica! Fugue on Minds and Machines in the Spirit of Lewis Carrol*, Penguin Books, Harmondsworth -New York - Ringwood - Markham - Auckland, 1986/1979.

10. **J. Piaget**, *Biologie et connaissance. Essai sur les relations entre les régulations organiques et les processus cognitifs*, Gallimard, Paris, 1967.

11. **J. Piaget**, *Essai de logique opératoire*, Dounod, Paris, 1972.

12. **J. Piaget**, *Le structuralisme*, Presses Universitaires de France, Paris, 1968.

13. **J. Piaget**, *Traité de logique. Essai de logique opératoire*, A. Collin, Paris, 1949.

14. **J. Piaget** en **B. Inhelder**, *La genèse des structures logiques élémentaires*, Delachaux et Niestlé, Neuchàtel, 1959.

15. **H. Poincaré**, *La Science et l'Hypothèse*, Flammarion, Paris, 1907.

16. **M. Reybrouck**, *Over de relatie tussen muziek, wiskunde en beeld*, Wiskunde & Onderwijs 108 (2001), 27ste jaargang, 276 - 295.

17. **M. Reybrouck**, *Ruimtelijk en tijdelijk denken in wiskunde en muziek : groeipatronen en het principe van de overgang*, Wiskunde & Onderwijs 109 (2002), 28ste jaargang, 4 - 22.

18. M. Reybrouck, *Van grijpen naar begrijpen. Over cognitieve strategieën bij de omgang met muziek*, Cahiers voor didactiek 13, Wolters Plantyn, Deurne, 2001.

19. **P. Valéry**, *Poëzie en abstract denken*, in : P. Valéry. Wat af is, is niet gemaakt (vert.), De Bezige Bij, Amsterdam,1939.

20. **M. Wertheimer**, *Productive Thinking*, Tavistock Publications, London, 1961/1945.

Mark Reybrouck
K. U. Leuven

Eikendreef 21
8490 Varsenare.